

グレブナー基底による多面体の頂点の計算

中山洋将, 山本侑理 (東海大学)

2022.12.20. 11:10 –
Computer Algebra - Foundations and Applications

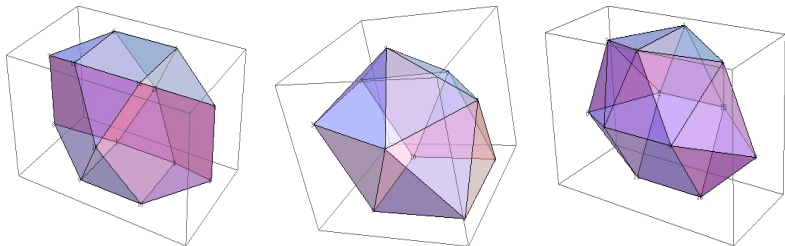
- 各面が正多角形である多面体はザルガラー多面体と呼ばれ、92種類のみ存在することが知られている。
- 関口氏は、その頂点の座標の満たす連立方程式を立て、それを解くことでザルガラー多面体とその星形化に相当する擬ザルガラー多面体の頂点の座標を計算している [関口 1996]。
- その計算において仮定している条件式を極力減らして、連立方程式を解くことにより、新たな擬ザルガラー多面体を幾つか見つけることができた。

- ① ザルガラー多面体.
- ② グレブナー基底による多面体の頂点の計算法 (関口氏の代数的方法) と擬ザルガラー多面体.
- ③ 新たに計算できた擬ザルガラー多面体について.

ザルガラー多面体

定義 1 (ザルガラー多面体)

各面が正多角形である多面体を**ザルガラー多面体**という。



- 正多角柱, 正多角反柱を除くと, ザルガラー多面体は 92 種類のみ存在する [Zalgaller 1969].
- ザルガラー多面体の頂点を計算するアルゴリズムと各多面体の頂点のデータ [小林, 鈴木 1992].
- ザルガラー多面体と擬ザルガラー多面体の頂点の代数的方法による計算 [関口 1996].

ザルガラー多面体の頂点の計算方法

関口氏の代数的方法 [関口 1996]

ザルガラー多面体のグラフ (点, 辺, 面の組合せ構造, face poset) から, 頂点の座標 (x_i, y_i, z_i) について連立方程式を立て, その連立方程式をグレブナー基底などを使い解き, 頂点の座標を計算する.

各面の正多角形について以下の条件から, 方程式を立てる.

辺の長さが等しい. 内角が等しい. 各 4 点が同一平面上にある.

例. 点 P_i の座標 (x_i, y_i, z_i) とし, P_i は同じ面内の点とする.

- 辺 $P_i P_j$ と辺 $P_k P_l$ の長さが等しい \iff
 $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 =$
 $(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2$
- $\angle P_i P_j P_k = \angle P_j P_k P_l \iff P_i P_k = P_j P_l$
- 点 P_i, P_j, P_k, P_l が同一平面上にある \iff

$$\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \end{pmatrix} = 0$$

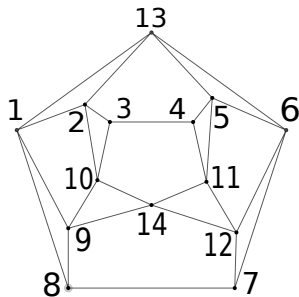
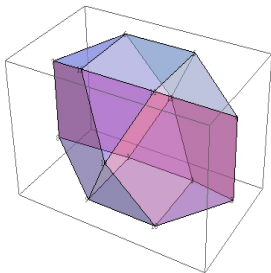
ザルガラー多面体 M_8 の計算 [関口 1996] その 1

頂点 14 個, 面 14 枚 (正 3 角形 8 枚, 正 4 角形 2 枚, 正 5 角形 4 枚).

正 3 角形 $P_1P_2P_{13}, P_5P_6P_{13}, P_9P_{10}P_{14}, P_{11}P_{12}P_{14}, P_1P_8P_9, P_2P_3P_{10},$
 $P_6P_7P_{12}, P_4P_5P_{11}$

正 4 角形 $P_1P_2P_{10}P_9, P_5P_6P_{12}P_{11}$

正 5 角形 $P_1P_8P_7P_6P_{13}, P_2P_3P_4P_5P_{13}, P_9P_8P_7P_{12}P_{14}, P_{10}P_3P_4P_{11}P_{14}$



ザルガラ一多面体 M_8 の計算 [関口 1996] その 2

各面が正多角形であるという条件 (辺の長さが等しい, 内角が等しい, 頂点が同一平面上にある) から出てくる連立代数方程式 (変数 42 個, 方程式 80 本) に, [関口 1996, p.80] の条件式 (7.1)

$$x_1 = -x_2 = x_9 = -x_{10} = -1,$$

$$y_1 = y_2 = y_9 = y_{10} = -y_5 = -y_6 = -y_{11} = -y_{12},$$

$$z_1 = z_2 = -z_9 = -z_{10}, \quad x_5 = -x_6 = x_{11} = -x_{12} = 1,$$

$$z_5 = z_6 = -z_{11} = -z_{12} = 1, \quad y_3 = -y_4 = -y_7 = y_8 = -1,$$

$$z_3 = z_4 = z_7 = z_8 = 0, \quad x_3 = x_4 = -x_7 = -x_8,$$

$$x_{13} = x_{14} = y_{13} = y_{14} = 0, \quad z_{13} = -z_{14}$$

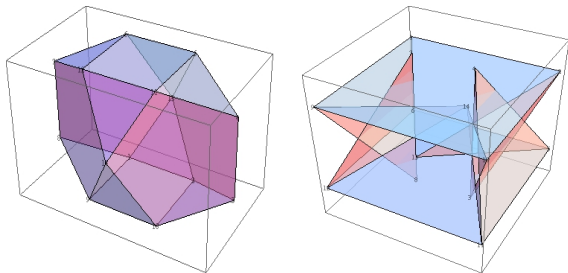
を代入すると, 変数 4 個, 方程式 60 本の連立代数方程式が得られ, その GB は,

$$z_{14}^2 + z_{14} - 1, x_8 - z_{14} + 1, z_{10} + 1, y_{12} + z_{14}$$

となり, 解の個数は 2 個でいずれも実数解となる.

ザルガラー多面体 M_8 の計算 [関口 1996] その3

これらの解から得られる頂点で、多面体を描画すると以下のようなになる。



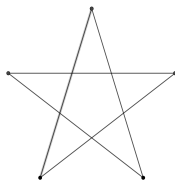
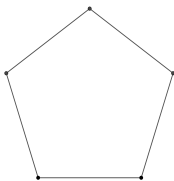
ザルガラー多面体以外になるもの (右図) がある。これが擬ザルガラー多面体と定められているもの。

擬ザルガラー多面体

定義 2 (擬ザルガラー多面体, 関口 1996)

元のザルガラー多面体と同じ頂点, 辺を持ち, 面を構成する頂点も同一であり, 面の共通辺も同じものを**擬ザルガラー多面体**という.

面の交差や凸にならないことや面が星形になることを許し, 条件を緩めたもの.



[関口 1996] では, ザルガラー多面体の対称性などから頂点の間に関係式を仮定し, その関係式を使って連立方程式の変数を極力減らすことで計算を可能にしている.

問題

頂点の間になるべく条件を仮定せずに, 連立方程式を解いて新たな擬ザルガラー多面体は出ないか?

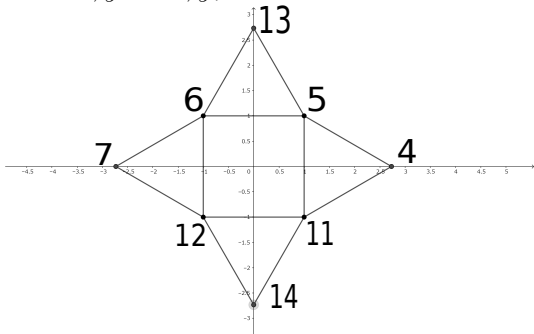
[関口 1996] に,

「これらの関係式を仮定することにそれほど根拠があるわけではない. 変数が多いと連立方程式を解くのが大変である, という技術的な理由で仮定したわけである。」

とある.

M_8 の擬ザルガラー多面体の計算

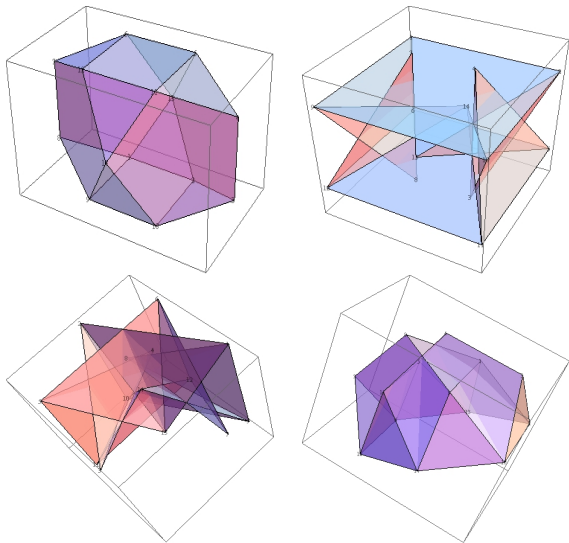
- 条件式. $P_5P_6P_{12}P_{11}$ を xy 平面
(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0) と配置し, この面に隣接する面 (正三角形) の頂点についての明らかな条件
 $x_{13} = 0, x_{14} = 0, y_4 = 0, y_7 = 0$ を追加.



- 変数が 25 個で, 80 本の連立代数方程式.
- \mathbb{Q} 係数で grevlex について GB 計算可能 (nd_gr 380s, nd_f4 228s). 0 次元イデアルで解の個数は 12 個. このうち, 実数解は 12 個.

M_8 の擬ザルガラー多面体

上段は既知のもの. 下段が新たに見つけたものになる.

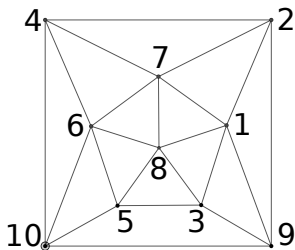
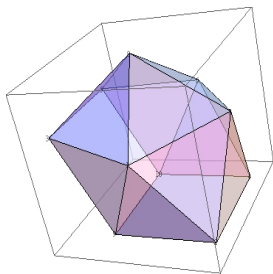


M_{22} の擬ザルガラー多面体の計算

頂点 10 個, 面 14 枚 (正 3 角形 12 枚, 正 4 角形 2 枚).

正 3 角形 $P_1P_2P_7, P_1P_2P_9, P_1P_7P_8, P_1P_3P_8, P_1P_3P_9, P_2P_4P_7, P_3P_5P_8,$
 $P_4P_6P_7, P_4P_6P_{10}, P_5P_6P_8, P_5P_6P_{10}, P_6P_7P_8$

正 4 角形 $P_2P_4P_{10}P_9, P_3P_5P_{10}P_9$



各面が正多角形であるという条件 (辺の長さが等しい, 内角が等しい, 頂点が同一平面上にある) から出てくる連立代数方程式 (変数 30 個, 方程式 48 本) に, [関口 1996, p.94] の条件式

$$y_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, y_3 = -y_2, z_3 = -z_2,$$

$$x_4 = -1, y_4 = y_2, z_4 = -z_2, x_5 = -1, y_5 = -y_2, z_5 = -z_2,$$

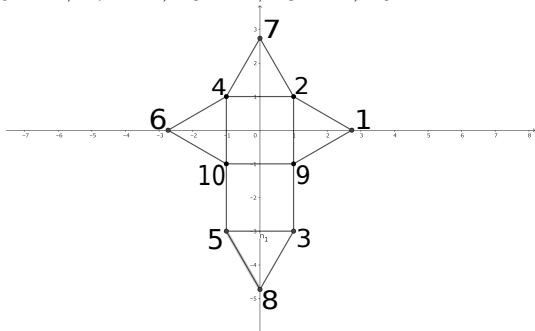
$$x_6 = -x_1, y_6 = 0, z_6 = z_1, x_7 = 0, y_7 = 1, x_8 = 0, y_8 = -1, z_8 = z_7,$$

$$x_9 = 1, y_9 = 0, z_9 = -z_7, x_{10} = -1, y_{10} = 0, z_{10} = -z_7$$

を代入すると, 変数 5 個, 方程式 36 本の連立代数方程式が得られ, 解の個数は 16 個となる. このうち, 実数解は 8 個で 4 種類の擬ザルガラ一多面体が出る.

M_{22} の擬ザルガラー多面体の計算

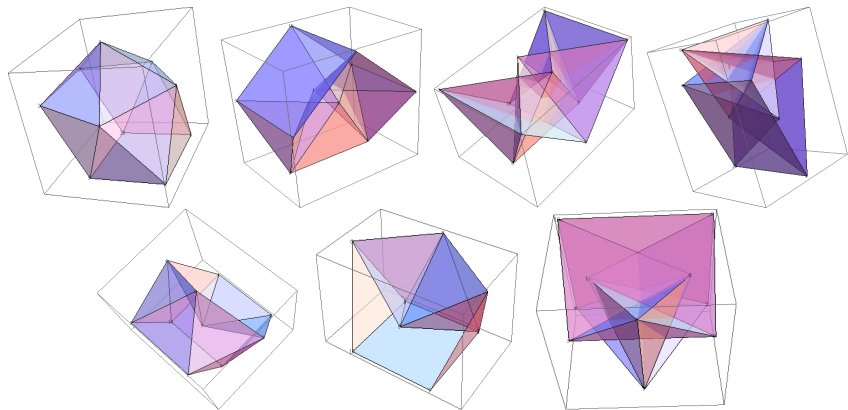
- 条件式. $P_2P_4P_{10}P_9$ を xy 平面
(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0) と配置し, この面に隣接する面の頂点についての明らかな条件
 $y_1 = 0, y_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_3 = 1, x_5 = -1$ を追加.



- 変数が 12 個で, 38 本の連立代数方程式.
- \mathbb{Q} 係数で grevlex で GB 計算可能 (nd_gr 2s). 0 次元イデア
ルで解の個数は 36 個. このうち, 実数解は 20 個で, 擬ザル
ガラー多面体が 7 種類出る.

M_{22} の擬ザルガラー多面体

上段は既知のもの. 下段が新たに見つけたものになる.

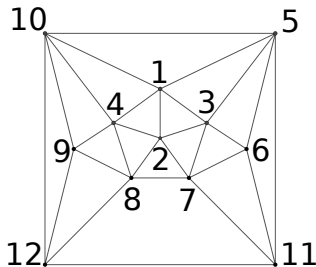
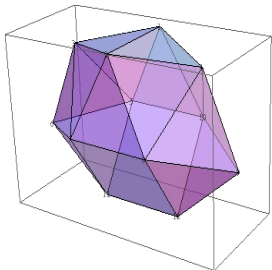


M_{23} の擬ザルガラー多面体の計算

頂点 12 個, 面 14 枚 (正 3 角形 16 枚, 正 4 角形 2 枚).

正 3 角形 $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_5, P_1P_4P_{10}, P_1P_5P_{10}, P_2P_3P_7,$
 $P_2P_4P_8, P_2P_7P_8, P_3P_5P_6, P_3P_6P_7, P_4P_8P_9, P_4P_9P_{10},$
 $P_5P_6P_{11}, P_6P_7P_{11}, P_8P_9P_{12}, P_9P_{10}P_{12},$

正 4 角形 $P_5P_{10}P_{12}P_{11}, P_7P_8P_{12}P_{11}$



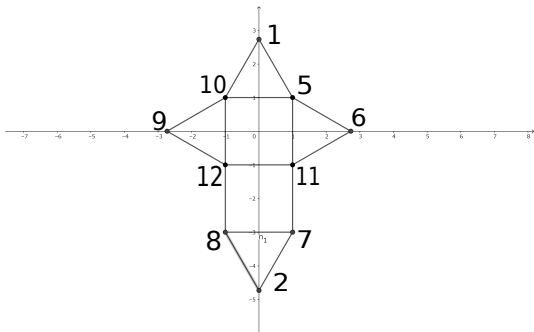
各面が正多角形であるという条件 (辺の長さが等しい, 内角が等しい, 頂点が同一平面上にある) から出てくる連立代数方程式 (変数 36 個, 方程式 60 本) に, [関口 1996, p.97] の条件式 (7.29)

$$\begin{aligned}x_{11} &= -1, y_{11} = 0, z_{11} = 0, x_{12} = 1, y_{12} = 0, z_{12} = 0, \\x_1 &= 0, x_2 = 0, y_2 = -1, y_1 = 1, z_2 = z_1, x_4 = -x_3, y_3 = 0, y_4 = 0, \\z_4 &= z_3, y_6 = 0, y_9 = 0, x_9 = -x_6, z_9 = z_6, x_5 = -1, x_7 = -1, x_8 = 1, \\x_{10} &= 1, y_8 = -y_5, y_7 = -y_5, y_{10} = y_5, z_7 = z_5, z_8 = z_5, z_{10} = z_5\end{aligned}$$

を代入すると, 変数 7 個, 方程式 48 本の連立代数方程式が得られ, 解の個数は 36 個で, 実数解は 16 個となる. 擬ザルガラ一多面体が 8 種類出る.

M_{23} の擬ザルガラー多面体の計算 その 1

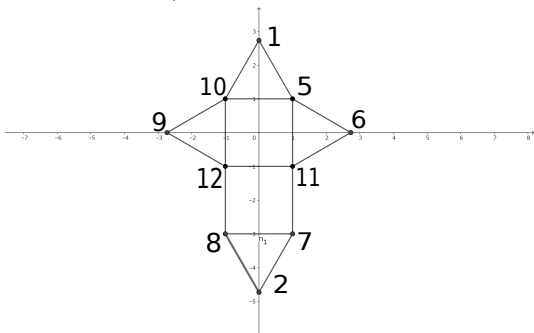
- 条件式. $P_5P_{10}P_{12}P_{11}$ を xy 平面
(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0) に配置し, この面に隣接する面 (正 3 角形, 正 4 角形) の頂点についての明らかな条件 $y_6 = 0, y_9 = 0, x_1 = 0, x_7 = -1, x_8 = 1, y_7 = y_8, z_7 = z_8, x_2 = 0$ を追加.



- 変数が 16 個で, 46 本の連立代数方程式.
- \mathbb{Q} 係数で grevlex で GB 計算可能 (nd_gr 1544s, nd_f4 79sec). しかし, 0 次元イデアルではない.

M_{23} の擬ザルガラー多面体の計算 その2

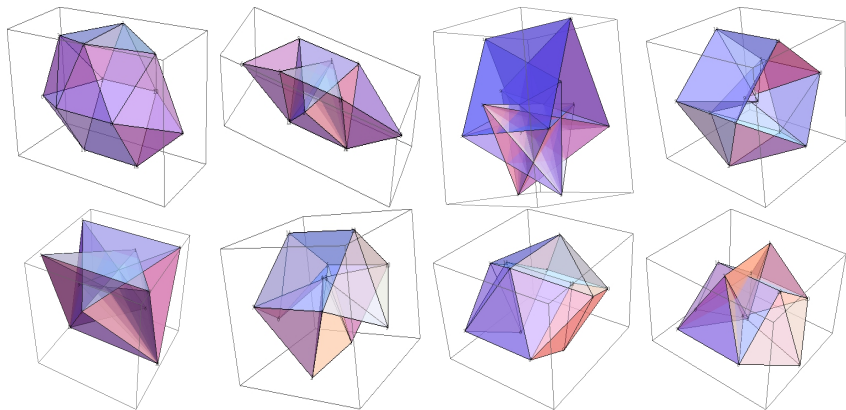
- 頂点が重なることで、解が無限に出てくることが起こる。ここで P_7 が P_5 に重ならない、すなわち 2 枚の正方形が重ならないように、条件を追加する。具体的には $z_7 \neq 0$ という条件をイデアルに付加する (新しい変数 t を用意して $z_7 t - 1$ をイデアルに追加して、 t について消去イデアルを計算する)。



- これは 0 次元イデアルになり、 \mathbb{Q} 係数で grevlex の GB 計算可能 (nd_gr 20s). 解の個数は 88 個. このうち、実数だけからなる解は 52 個でてきて、擬ザルガラー多面体が 8 種類出る.

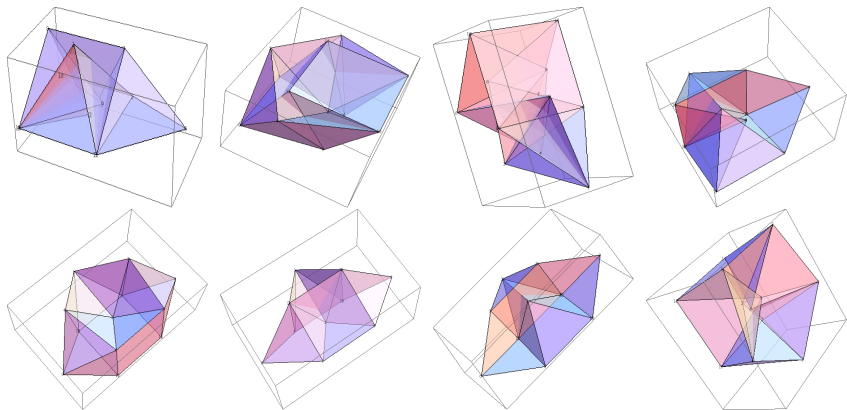
M_{23} の擬ザルガラー多面体

既知のもの.



M_{23} の擬ザルガラー多面体

新たに見つけたもの.



主結果

ザルガラー多面体 M_8, M_{22}, M_{23} について, 新たな擬ザルガラー多面体が幾つか見つかった.

多面体	変数	式	解	GB 計算	既知のもの	新たなもの
M_8	25 個	80 本	12 個	380s	2 個	2 個
M_{22}	12 個	38 本	20 個	2s	4 個	3 個
M_{23}	17 個	47 本	88 個	20s	8 個	8 個

(ここで, GB 計算は \mathbb{Q} 係数で grevlex について Asir の nd_gr を用いた. PC Core i7-3520(2.9 GHz), 16GB を使用.)

- 作成したプログラム

Asir (GB 計算) + Mathematica (連立方程式を近似的に解く, 多面体の描画)

まとめ, 今後の展望

- 関口氏の代数的手法と GB 計算の工夫より, 新たな擬ザルガラー多面体が幾つか見つかった.
- 他のザルガラー多面体でも, 新たな擬ザルガラー多面体が見つかる余地はあると思われる.
- 関口氏の代数的手法は, 一般の多面体や高次元の多面体の頂点の座標計算にも使える.
- GB 計算のベンチマーク問題.

- [関口 1996] 関口次郎, 「多面体の数理とグラフィックス」, 牧野書店
- [Zalgaller 1969] V. A. Zalgaller, "Convex polyhedra with regular faces", Consultants Bureaux, 1969.
- [小林, 鈴木 1992] 小林光夫, 鈴木卓治, 「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」, 電気通信大学紀要, 第 5 卷 (1992), 147-184