K-hive 上の A 型結晶構造に関するアルゴリズムとその実装（Algorithms and implementations for crystals of K-hives of type A）

Shota Narisawa Kiyoshi Shirayanagi

2022.12.21

Toho University

Table of contents

イントロダクション

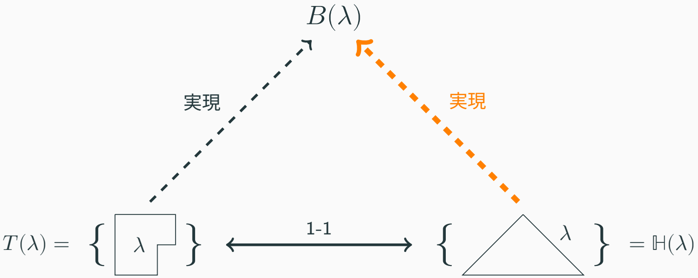
可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 M のある性質の良い基底（結晶基底 [Kashiwara90][Kashiwara91]）を調べる

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\text{A 型リー環}}{\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n} \arrow[d, hook] & & & \\
\underset{\text{包絡環}}{U(\mathfrak{g})} \arrow[rr, dashed, shift left, "q\text{-量子化}"] & & \underset{\text{量子群}}{U_q(\mathfrak{g})} \arrow[ll, dashed, shift left, "q \to 1"] \arrow[r, bend left, "\text{可積分}"] & M \in \mathcal{O}_q^{\mathsf{int}}(\mathfrak{g}) \arrow[d, dashed, "q \to 0"'] \\
& & & \boxed{\begin{array}{c}(L, B) \\ \text{結晶基底}\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

特に M が既約最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ の場合を扱う

K-hive による実現

$V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の，ヤング盤による実現 [Kashiwara-Nakashima94] とは独立な, K-hive の集合 $\mathbb{H}(\lambda)$ による実現を構成した [N-S22].



$V(\lambda)$ の結晶基底のテンソル積分解を K-hive の組合わせ論により与えた [N-S, submitted].

$$
\begin{tikzcd}
& \boxed{B(\lambda) \otimes B(\mu) \cong \bigsqcup_\nu B(\nu)} & \\
\boxed{T(\lambda) \otimes T(\mu) \cong \bigsqcup_\nu T(\nu)} \arrow[ur, dashed, "\text{ヤング盤による記述}"] & & \boxed{\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) \cong \bigsqcup_\nu \mathbb{H}(\nu)} \arrow[ul, dashed, "\text{K-hive による記述}"']
\end{tikzcd}
$$

結果とその応用

結果

- K-hive 上の結晶構造を計算するアルゴリズムを与えた．
- K-hive によるテンソル積分解を計算するアルゴリズムを与えた．
- 上記のアルゴリズムを Python パッケージとして実装した．

応用

- 表現論上の問題に対する K-hive の組合せ論からの計算環境の提供．
- $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ のテンソル積分解が K-hive の組合せ論として計算可能．

準備

準備

結晶

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$，$I = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ϵ_i: $\mathbb{R}^n$ の標準基底, $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$: 単純ルート，$h_i$: 単純コールート，$P$: 整ウェイト格子, $\Lambda_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i$: i-th 基本ウェイトとする．

Definition [Hong-Kang02]
B: 集合, $\mathrm{wt} : B \to P$, $e_i, f_i : B \cup \{0\} \to B \cup \{0\}\,(i \in I)$, $\varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}\,(i \in I)$. $(B, \mathrm{wt}, e_i, f_i, \varepsilon_i, \varphi_i)$ が以下を満たすとき、A_{n-1} 型結晶とよぶ

1. $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b) \rangle$,
2. $wt(e_i b) = wt(b) + \alpha_i$, $\varepsilon_i(e_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(e_i b) = \varphi_i(b) + 1$,
3. $wt(f_i b) = wt(b) - \alpha_i$, $\varepsilon_i(f_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(f_i b) = \varphi_i(b) - 1$,
4. $f_i b = b' \iff b = e_i b'$,
5. $\varphi_i(b) = -\infty \Rightarrow e_i b = f_i b = 0$.

結晶のテンソル積

Definition [Hong-Kang02]
B_1, B_2: 結晶．$B_1 \otimes B_2$ を集合 $B_1 \times B_2$ と次の結晶構造によって定義する．

1. $\mathrm{wt}(b_1 \otimes b_2) = \mathrm{wt}(b_1) + \mathrm{wt}(b_2)$,
2. $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \mathrm{wt}(b_1)(h_i))$,
3. $\varphi(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi(b_2), \varphi(b_1) + \mathrm{wt}(b_2)(h_i))$,
4. $e_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} e_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes e_i b_2 & \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases}$
5. $f_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} f_i b_1 \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes f_i b_2 & \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$

準備

K-hives

Integer Hive Graph（定義）

Definition [Terada-King-Azenhas18]
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n$. $(U_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$. $G = (\alpha, \beta, \gamma, (U_{ij})_{i<j})$ が

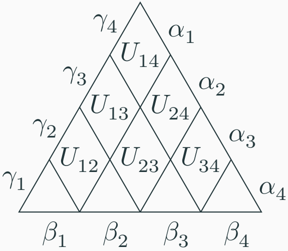
$$\beta_i = (\gamma_i + \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}) - (\alpha_i - \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik})$$

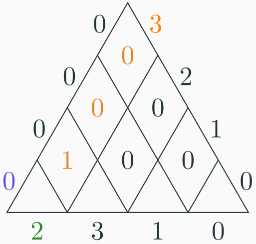
を満たすとき、G をサイズ n のinteger hive graphとよぶ.

Integer Hive Graph（例）

Example

$\alpha = (3,2,1,0)$, $\beta = (2,3,1,0)$, $\gamma = (0,0,0,0)$,
$(U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}) = (1,0,0,0,0,0)$.





$$\beta_1 = \gamma_1 - (\alpha_1 - \sum_{k=2}^{4} U_{1k})$$

K-hive（定義）

Definition [King-Tollu-Toumazet06]
$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. サイズ n の integer hive graph $H = (\lambda, \mu, \nu, (U_{ij})_{i<j})$ が次を満たすとき，H をK-hiveとよぶ．

1. $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$, $\sum_k \lambda_k = m$,
2. $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\sum_k \mu_k = m$,
3. $\nu = (0, 0, \dots, 0)$,
4. $U_{ij} \geq 0$,
5. $L_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} U_{ik} - \sum_{k=1}^{j} U_{i+1,k} \geq 0$,
6. $\mu_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \geq 0$.

また $U_{ii} = \mu_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \, (i \in I)$ とする．

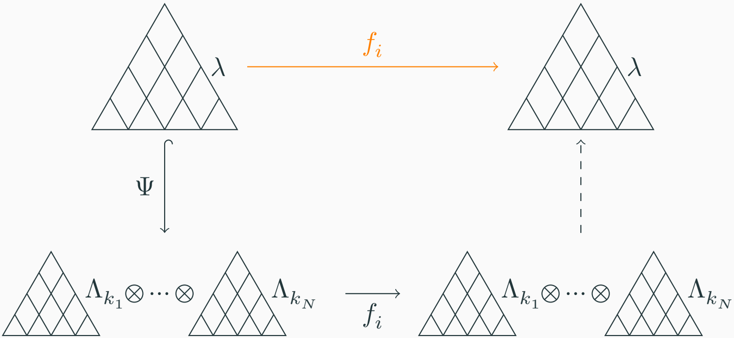
$$\mathcal{H}(\lambda, \mu, 0) := \{H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \mid H \text{ は K-hive}\},$$
$$\mathbb{H}(\lambda) := \bigsqcup_{\mu} \mathcal{H}(\lambda, \mu, 0).$$

アルゴリズムと実装

アルゴリズムと実装

K-hive 上の結晶構造

$\mathbb{H}(\lambda)$ 上の結晶構造（概要）



Proposition [N-S22]

$\nu \in I$. $\mathrm{wt}\colon \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \to P$, $e_i, f_i\colon \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \to \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \cup \{0\}$, $\varepsilon_i, \varphi_i\colon \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i \in I)$ を次の方法でする. このとき，$\mathbb{H}(\Lambda_\Bbbk)$ は A_{n-1} 型結晶となる． $H = (\Lambda_\nu, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\Lambda_\nu)$ とする.

- $\mathrm{wt}(H) := \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_k - \mu_{k+1})\Lambda_k \in P$,
- $\varepsilon_i(H) := \max(\mu_{i+1} - \mu_i, 0)$,
- $\varphi_i(H) := \max(\mu_i - \mu_{i+1}, 0)$,

Simple case: $\mathbb{H}(\Lambda_k)$ 上の結晶構造（定義）

- $\mu' := \sum_{k=1}^{n} \mu'_k \epsilon_k \in P$．ここで $\mu'_i = \mu_i + 1$, $\mu'_{i+1} = \mu_{i+1} - 1$, $\mu'_k = \mu_k \, (k \neq i, i+1)$ とする.
  $K_0 := \{k \in \{1, 2, \dots, i+1\} \mid U_{k,i+1} > 0\}$,

$$U'_{kl} := \begin{cases} U_{k,l} + 1 & \text{if } k \in K_0, l = i, \\ U_{k,l} - 1 & \text{if } k \in K_0, l = i+1, \\ U_{k,l} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

  このとき，$i \in I$ に対し，$e_i \colon \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \to \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \cup \{0\}$ を次のように定める．

$$e_i H = \begin{cases} (\Lambda_\nu, \mu', 0, (U'_{kl})_{k<l}) & \varepsilon_i(H) > 0, \\ 0 & \varepsilon_i(H) = 0, \end{cases}$$

Simple case: $\mathbb{H}(\Lambda_k)$ 上の結晶構造（定義）

- $\mu' := \sum_{k=1}^{n} \mu'_k \epsilon_k \in P$, ここで $\mu'_i = \mu_i - 1$, $\mu'_{i+1} = \mu_{i+1} + 1$, $\mu'_k = \mu_k\,(k \neq i, i+1)$. $K_0 := \{k \in \{1, 2, \dots, i\} \mid U_{k,i} > 0\}$

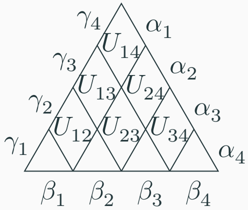
$$U'_{kl} := \begin{cases} U_{k,l} - 1 & \text{if } k \in K_0, l = i, \\ U_{k,l} + 1 & \text{if } k \in K_0, l = i+1, \\ U_{k,l} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

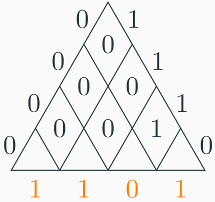
このとき，$i \in I$ に対し，$f_i \colon \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \to \mathbb{H}(\Lambda_\nu) \cup \{0\} (i \in I)$ は次のように定義される．

$$f_i H = \begin{cases} (\Lambda_\nu, \mu', 0, (U'_{kl})_{k<l}) & \varphi_i(H) > 0, \\ 0 & \varphi_i(H) = 0. \end{cases}$$

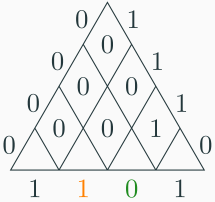
Simple case: $\mathbb{H}(\Lambda_k)$ 上の結晶構造（例）

Example ($\mathfrak{sl}_4$, $\mathbb{H}(\Lambda_3)$)



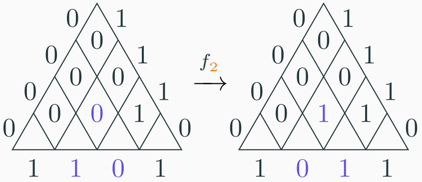


$\mathrm{wt}(H) = 1 \cdot \epsilon_1 + 1 \cdot \epsilon_2 + 0 \cdot \epsilon_3 + 1 \cdot \epsilon_4$



$\varphi_2(H) = \max(1 - 0, 0)$

$= 1$



$U_{12} = 0,\ U_{22} = 1,\ K_0 = \{2\},$

$U_{22} \leftarrow U_{22} - 1,\ U_{23} \leftarrow U_{23} + 1.$

$\Psi_\lambda \colon \mathbb{H}(\lambda) \to \mathbb{H}(\mu) \times \mathbb{H}(\Lambda_k)$（定義）

Proposition[N-S22]

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \Lambda_i \in P^+$, $\nu = \max\{i \in I \mid m_i \neq 0\}$ とする．
$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ に対し，$H^{(k)} = (\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, 0, (U_{ij}^{(k)})_{i<j})$ $(k = 1, 2)$ を次のように定める．

$$\lambda^{(k)} = \begin{cases} \lambda - \Lambda_\nu & k = 1, \\ \Lambda_\nu & k = 2, \end{cases}$$

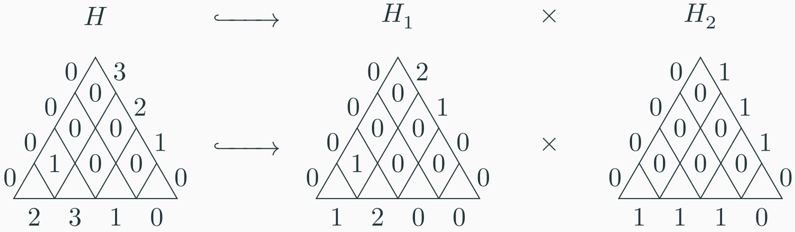
$$U_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1 & j = \min\{j \in I \cup \{n\} \mid U_{ij} > 0\}, \\ 0 & \text{else}, \end{cases}$$

$$U_{ij}^{(1)} = U_{ij} - U_{ij}^{(2)},$$

$$\mu_i^{(k)} = \sum_{l=1}^{i} U_{li}^{(k)} \quad (k = 1, 2).$$

このとき，$\Psi_\lambda \colon \mathbb{H}(\lambda) \to \mathbb{H}(\lambda^{(1)}) \times \mathbb{H}(\lambda^{(2)})$ を $\Psi_\lambda(H) = H_1 \otimes H_2$ で定めるとこれは単射．

Example



Definition [N-S22]
$H \in \mathbb{H}(\lambda)$ に対し，

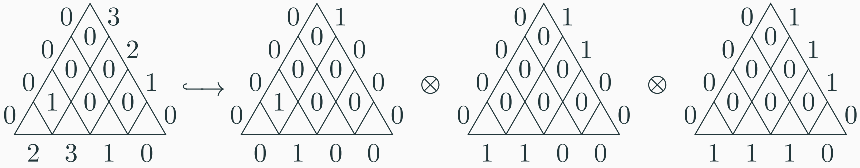
$$H \xrightarrow{\Psi_\lambda} H_1^{(1)} \otimes H_2^{(1)} \xrightarrow{\Psi_{\lambda^{(11)}} \otimes 1} H_1^{(2)} \otimes H_2^{(2)} \otimes H_3^{(2)} \xrightarrow{\Psi_{\lambda^{(22)}} \otimes 1 \otimes 1}$$
$$\cdots \xrightarrow{\Psi_{\lambda^{(N-1,N-1)}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1} H_1^{(N)} \otimes \cdots \otimes H_N^{(N)}$$

とする．ここで，$H_k^{(m)} \in \mathbb{H}(\lambda^{(mk)})$．このとき，$\Psi\colon \mathbb{H}(\lambda) \to \bigotimes_k \mathbb{H}(\Lambda_k)$ を $\Psi(H) = H_1^{(N)} \otimes \cdots \otimes H_N^{(N)}$ で定める．

$\Psi\colon \mathbb{H}(\lambda) \to \bigotimes_k \mathbb{H}(\Lambda_k)$ (例)

Example

$$H \quad \hookrightarrow \quad H_1 \quad \otimes \quad H_2 \quad \otimes \quad H_3$$



$\Psi\colon \mathbb{H}(\lambda) \to \bigotimes_k \mathbb{H}(\Lambda_k)$（アルゴリズム）

Input: $H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$

Output: $\Psi(H)$

```
H_1 ⊗ H_2 := Ψ_λ(H)
N = 2
while H_1 ∉ ℍ(Λ_k) for any k ∈ I do
    K_1 ⊗ K_2 := Ψ_λ(H_1)
    H := K_1 ⊗ K_2 ⊗ H_2 ⊗ ··· ⊗ H_N
    N = N + 1
    Rename H as H = H_1 ⊗ H_2 ⊗ ··· ⊗ H_N
return ⨂_{k∈N} H_k
```

$\mathbb{H}(\lambda)$ の結晶構造（定義 1）

Definition [N-S22]
$\mathbb{H}(\lambda)$ の結晶構造は Ψ が crystal morphism となるように定義する．

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "f_i"] \arrow[d, hook, "\Psi"'] & & f_i H \\
H_1 \otimes \cdots \otimes H_N \arrow[rr, "f_i"'] & & f_i(H_1 \otimes \cdots \otimes H_N) \arrow[u, dashed, "\Psi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

実際に計算する際には，Ψ^{-1} を計算する必要がある．

Ψ^{-1}（アルゴリズム）

Input: $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_N \in \bigotimes_k \mathbb{H}(\Lambda_k)$,

$H_k = (\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, 0, (U_{ij}^{(k)})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda^{(k)})$.

Output: $\Psi^{-1}(H) \in \mathbb{H}(\lambda)$

```
for i = 1, 2, ..., n do
    λ_i := Σ_{k=1}^{N} λ_i^{(k)}
λ := (λ_1, λ_2, ..., λ_n)
for i = 1, 2, ..., n do
    μ_i := Σ_{k=1}^{N} μ_i^{(k)}
μ := (μ_1, μ_2, ..., μ_n)
for i = 1, 2, ..., n − 1 do
    for j = i + 1, i + 2, ..., n do
        U_ij := Σ_{k=1}^{N} U_ij^{(k)}
return (λ, μ, (0^n), (U_ij)_{i<j})
```

Theorem [N-S22]
$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \Lambda_i$，$H \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする．wt, f_j, e_j, φ_j, ε_j ($j \in I$) は次の方法で計算される．$j \in I$ を固定する.

- $\mathrm{wt}(H) = \sum_{i \in I} (\mu_i - \mu_{i+1}) \Lambda_i$.
- $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ に対し, $\varphi_j^{(k)}(H) = \max\{\varphi_j^{(k-1)}(H) + U_{k,j} - U_{k+1,j+1}, 0\}$ とする. ここで $\varphi_j^{(0)} = 0$ とする. このとき，$\varphi_j(H) = \varphi_j^{(j)}(H)$.
- $k \in \{1, 2, \dots, j+1\}$ に対し, $\varepsilon_j^{(k)}(H) = \max\{\varepsilon_j^{(k-1)}(H) + U_{j+2-k,j+1} - U_{j+1-k,j}, 0\}$ とする. ここで $\varepsilon_j^{(0)} = 0$ とする. このとき，$\varepsilon_j(H) = \varepsilon_j^{(j+1)}(H)$.

- $\varphi_j(H) = 0$ のとき，$f_j H = 0$. $\varphi_j(H) \neq 0$ のとき,

$$k' = \min\{k \in I \cup \{n\} \mid \forall l \geq k,\ \varphi_j^{(l)}(H) > 0\}.$$

とする．このとき，$f_j H = (\lambda, \mu', 0, (U'_{kl})_{k<l})$ が成り立つ．ここで

$$\mu' = \sum_{k \neq j, j+1} \mu_k \epsilon_k + (\mu_j - 1)\epsilon_j + (\mu_{j+1} + 1)\epsilon_{j+1},$$

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } k = k',\ l = j, \\ U_{kl} + 1 & \text{if } k = k',\ l = j+1, \\ U_{kl} & \text{else.} \end{cases}$$

- $\varepsilon_j(H) = 0$ のとき，$e_j H = 0$. $\varepsilon_j(H) \neq 0$ のとき，

$$k' = \min\{k \in I \cup \{n\} \mid \forall l \geq k,\, \varepsilon_j^{(l)}(H) > 0\}.$$

とする．このとき，$e_j H = (\lambda, \mu', 0, (U'_{kl})_{k<l})$ が成り立つ．ここで

$$\mu' = \sum_{k \neq j, j+1} \mu_k \epsilon_k + (\mu_j + 1)\epsilon_j + (\mu_{j+1} - 1)\epsilon_{j+1},$$

$$U'_{kl} = \begin{cases} U_{kl} + 1 & \text{if } k = j + 2 - k',\ l = j, \\ U_{kl} - 1 & \text{if } k = j + 2 - k',\ l = j + 1, \\ U_{kl} & \text{else.} \end{cases}$$

$\mathbb{H}(\lambda)$ の結晶構造（アルゴリズム 2）

Input: $H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$, $i \in I$

Output: $f_i H$

if $\varphi_i(H) = 0$ **then**
  return 0
$F := [0]$
for $k = 1, 2, \dots, i$ **do**
  $F := F.\mathrm{append}(\max(U_{ki} - U_{k+1,i+1} + F[k-1], 0))$
$k_{f_i H} := 1$
for $k = i, i-1, \dots, 1$ **do**
  if $F[k] < 0$ **then**
    $k_{f_i H} := k - 1$
    break
$\mu_i := \mu_i - 1$
$\mu_{i+1} := \mu_{i+1} + 1$
$U_{k_{f_i},i} := U_{k_{f_i},i} - 1$
$U_{k_{f_i},i+1} := U_{k_{f_i},i+1} + 1$
return $(\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j})$

アルゴリズムと実装

テンソル積分解

分解写像（定義）

Definition [N-S, submitted]

$\lambda, \mu \in P^+$ に対し，$H \otimes K \in \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ とする．このとき
$\Theta(H \otimes K) := \iota(H) \otimes \rho_{j_{\iota(H)}}(K)$ とする．

Theorem [N-S, submitted]
$\lambda, \mu \in P^+$ とする．$N := \sum_{i \in I} \lambda_i$．$M(\lambda, \mu)$ を $\mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$ の最高ウェイトベクトル全体とする．

$$P^+(\lambda, \mu) := \{\nu \in P^+ \mid \exists H \otimes K \in M(\lambda, \mu) \text{ s.t., } \nu = \mathrm{wt}(H \otimes K)\}.$$

このとき，

$$\Theta^N : \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu) \to \bigsqcup_{\nu \in P^+(\lambda, \mu)} \mathbb{H}(\nu)$$

は結晶の同型射．

Definition [N-S, submitted]

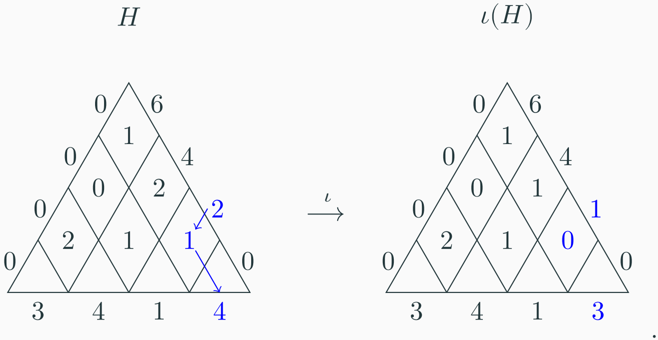
$\lambda := \sum_{k\in I}\lambda_k\epsilon_k \in P^+$. $j_{\iota(H)} := \min\{i\in[n] \mid U_{\ell(\lambda),i}\neq 0\}$. $H\in\mathbb{H}(\lambda)$ に対し，$\iota(H) = (\nu,\xi,0,(V_{ij})_{i<j})$ を次で定める．

$$\nu_k = \begin{cases}\lambda_k - 1 & \text{if } k=\ell(\lambda),\\ \lambda_k & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$\xi_k = \begin{cases}\mu_k - 1 & \text{if } k=j_{\iota(H)},\\ \mu_k & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$V_{ij} = \begin{cases}U_{ij} - 1 & \text{if } (i,j)=(\ell(\lambda),j_{\iota(H)}),\\ U_{ij} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Example



$\ell(\lambda) = 3,\ U_{33} = 0, U_{34} = 1,\ j_{\iota(H)} = \min\{i = 3, 4 \mid U_{3i} \neq 0\} = 4.$

$p_i(H)$（定義）

Definition [N-S, submitted]
$\lambda \in P^+$ に対し，$H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする．$a \in [n]$. とする．$(i_0, j_0) = (0, a)$ とする．$k \geq 1$ に対し，

$$i_k = \begin{cases} i_{k-1} & \text{if } k \in 2\mathbb{Z}_{>0}, \\ i_{k-1} + 1 & \text{if } k \in 2\mathbb{Z}_{>0} + 1, \end{cases}$$

$$j_k = \begin{cases} \min\{j \in [j_{k-1} + 1, n]_{\mathbb{Z}} \mid U_{i_{k-1}, j} > 0\} & \text{if } k \in 2\mathbb{Z}_{>0}, \\ j_{k-1} & \text{if } k \in 2\mathbb{Z}_{>0} + 1. \end{cases}$$

とする．また

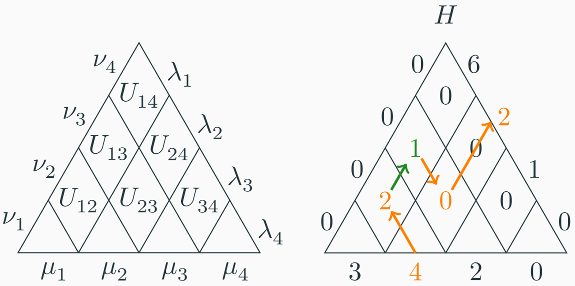
$$J_k := \{j \in [j_{k-1} + 1, n]_{\mathbb{Z}} \mid U_{i_{k-1}, j} > 0\},$$
$$N := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid J_k = \emptyset\}.$$

とする．このとき $p_a(H)$ を次で定める．

$$p_a(H) := (p_{a,k})_{k=0,\ldots,N} := ((i_k, j_k))_{k=0,\ldots,N}.$$

Example

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $H \in \mathbb{H}((6,2,1,0))$. $p_2(H)$ は次の通り．



$$p_2(H) = ((0,2),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4))$$

$p_i(H)$（アルゴリズム）

Input: $H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$, $i \in I$
Output: $p_i(H)$

$p_i(H) := []$
$(i_0, j_0) := (0, a)$
$p_i(H).\mathrm{append}((i_0, j_0))$
$k = 1$
while TRUE **do**
  $(i_k, j_k) := (i_{k-1} + 1, j_{k-1})$ {Note that $k \in 2\mathbb{Z}$}
  $p_i(H).\mathrm{append}((i_k, j_k))$
  $k := k + 1$
  $J_k := \{j \in [j_{k-1} + 1, n]_{\mathbb{Z}} \mid U_{i_{k-1},j} > 0\}$
  if $J_k := \emptyset$ **then**
    break
  $(i_k, j_k) = (i_{k-1}, \min J_k)$ {Note that $k \in 2\mathbb{Z} + 1$}
  $p_i(H).\mathrm{append}((i_k, j_k))$
  $k := k + 1$
return $p_i(H)$

Definition [N-S, submitted]

$\lambda \in P^+$, $H \in \mathbb{H}(\lambda)$ とする．$a \in [n]$ とする．$p_a(H) = (p_{a,m})_{m=0,\dots,N}$ とする．ここで $p_{a,m} = (i_m, j_m)$. $\rho_a(H) = (\nu, \xi, 0, (V_{kl})_{k<l})$ を次で定める．

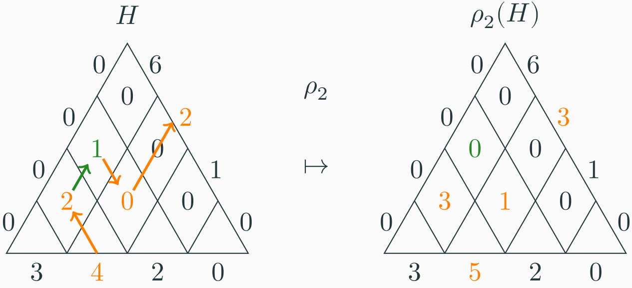
$$\nu_k = \begin{cases} \lambda_k + 1 & \text{if } i_N < n,\ k = i_N, \\ \lambda_k - 1 & \text{if } i_N = n,\ k \neq n, \\ \lambda_k & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\xi_k = \begin{cases} \mu_k + 1 & \text{if } i_N < n,\ k = j_0, \\ \mu_k - 1 & \text{if } i_N = n,\ k \neq j_0, \\ \mu_k & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$V_{kl} = \begin{cases} U_{kl} - 1 & \text{if } (k,l) = p_{a,m} \text{ for some } m \in 2\mathbb{Z}, \\ U_{kl} + 1 & \text{if } (k,l) = p_{a,m} \text{ for some } m \in 2\mathbb{Z}+1, \\ U_{kl} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ρ_a （例）

Example
$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3,\ H \in \mathbb{H}((3,2,1,0))$.



ρ_a （アルゴリズム）

Input: $H = (\lambda, \mu, 0, (U_{ij})_{i<j}) \in \mathbb{H}(\lambda)$, $a \in I$
Output: $\rho_a(H)$

$p_i(H) := ((i_k, j_k))_{k=1,\dots,N}$
$\alpha := \lambda$
$\alpha_{i_N} := \lambda_{i_N} + 1$
$\beta := \mu$
$\beta_{j_0} := \lambda_{j_0} + 1$
$(V_{ij})_{i<j} := (U_{ij})_{i<j}$
for $k = 1, \dots, N$ **do**
    if $k \in 2\mathbb{Z}$ **then**
        $V_{i_k, j_k} := V_{i_k, j_k} + 1$
    if $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ **then**
        $U_{i_k, j_k} := V_{i_k, j_k} - 1$
return $\rho_i(H)$

分解写像（アルゴリズム）

Input: $H_1 \otimes H_2 \in \mathbb{H}(\lambda) \otimes \mathbb{H}(\mu)$
Output: $\Theta(H_1 \otimes H_2)$

$K_1 := \iota(H_1)$
$j_{\iota(H)} := \min\{i \in [n] \mid U_{\ell(\lambda),i} \neq 0\}$
$K_2 := \rho_{j_{\iota(H_2)}}$
if $\sum_k \lambda_k > 1$ **then**
    return $K_1 \otimes K_2$
else
    return K_2

デモ

デモをします．実装は [N].

まとめ

まとめ

結果

- K-hive 上の結晶構造を計算するアルゴリズムを与えた．
- K-hive によるテンソル積分解を計算するアルゴリズムを与えた．
- 上記のアルゴリズムを Python パッケージとして実装した．

応用

- 表現論上の問題に対する K-hive の組合せ論からの計算環境の提供．
- $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ のテンソル積分解が K-hive の組合せ論として計算可能．

今後の課題

- K-hive 上の Robinson-Shensted 対応の構成
- そのアルゴリズム化と実装

[Hong-Kang02] J. Hong and S.-J. Kang. *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases*. Vol. 42. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, pp. xviii+307. DOI: 10.1090/gsm/042. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/042.

[Kashiwara-Nakashima94] M. Kashiwara and T. Nakashima. "Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras". In: *J. Algebra* 165.2 (1994), pp. 295–345. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1006/jabr.1994.1114. URL: https://doi.org/10.1006/jabr.1994.1114.

参考文献 ii

[Kashiwara90] M. Kashiwara. "Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras". In: *Comm. Math. Phys.* 133.2 (1990), pp. 249–260. ISSN: 0010-3616. URL: http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104201397.

[Kashiwara91] M. Kashiwara. "On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras". In: *Duke Math. J.* 63.2 (1991), pp. 465–516. ISSN: 0012-7094. DOI: 10.1215/S0012-7094-91-06321-0. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06321-0.

[King-Tollu-Toumazet06] R. C. King, C. Tollu, and F. Toumazet. “The hive model and the factorisation of Kostka coefficients”. In: *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* 54 (2006), B54Ah.

[N] Shota Narisawa. *khive-crystal*. Version 0.1.0. URL: https://github.com/snrsw/khive-crystal.

[N-S, submitted] S. Narisawa and K. Shirayanagi. “Tensor product decomposition of crystal bases of type A by K-hives”. In: *submitted to Communications in Algebra* ().

参考文献 iv

[N-S22] S. Narisawa and K. Shirayanagi. "Crystal structure on K-hives of type A". In: *Communications in Algebra* 50.12 (2022), pp. 5266–5283. DOI: 10.1080/00927872.2022.2084101.

[Terada-King-Azenhas18] I. Terada, R. C. King, and O. Azenhas. "The symmetry of Littlewood-Richardson coefficients: a new hive model involutory bijection". In: *SIAM J. Discrete Math.* 32.4 (2018), pp. 2850–2899. ISSN: 0895-4801. DOI: 10.1137/17M1162834. URL: https://doi.org/10.1137/17M1162834.