ＴＥＳ (Term Elimination Sequence) について

佐々木 建昭　(筑波大学・名誉教授)

0) 多変数多項式系の変数消去に関する予備知識

1) 二種類の多項式表現と先頭(単)項の消去

2) 二種類の変数消去法：ＴＥＳ法とＧＢ法

3) ＴＥＳに基づく生成元係数の算法と性質

4) ＴＥＳおよびＧＢ法に基づく変数消去の関係

5) 多多変数系でＴＥＳは利用できるだろうか？

多項式系の多変数消去に関する予備知識

- 関 孝和らの驚異的な偉業 (1674〜1685)
- 欧州における終結式法と余計因子問題
  Newton, Euler 〜 Macaulay, Dixon
- ＧＢ計算法：完璧だが超遅いのが欠点
  (単項式順序が辞書式の場合)
- 近年，画期的方法が日本で提案された
- その方法は三つの定理に基づくのだが,
  ＴＥＳは第一の定理に関わる

本論に先立ち，余計因子と第一の定理を実例で

PRS (= Polynomial Remainder Sequence)

$G, H \in \mathbb{K}[x, \boldsymbol{u}],\ \ (\boldsymbol{u}) = (u_1, \ldots, u_n)$

$\deg_x(G) \geq \deg_x(H)$, G と H は互いに素とする

$\mathbf{PRS}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}) = (P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k)$, $\boldsymbol{d_i} := \mathbf{deg}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{P_i})$

$P_1 = G,\ P_2 = H,\ \ P_k \in \mathbb{K}[\boldsymbol{u}] \neq 0$ (⇐ 変数消去)

$\boldsymbol{P'_{i+1}} := \mathbf{Prem}(\boldsymbol{P_{i-1}}, \boldsymbol{P_i}) = (\boldsymbol{\alpha_i P_{i-1}} - \boldsymbol{Q_i P_i})$

$\boldsymbol{d_{i+1} < d_i}$ $(\boldsymbol{i \geq 3})$, $\boldsymbol{\alpha_i} \in \mathbb{K}[\boldsymbol{u}]$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{K}[x, \boldsymbol{u}]$

($\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P'_{i+1}}$ は $\mathbb{K}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$ での剰余だ)

$\boldsymbol{P_{i+1}} := \boldsymbol{P'_{i+1}/\beta_i}$, $P_{i+1} \in \mathbb{K}[x, \boldsymbol{u}]$, $\beta \in \mathbb{K}[\boldsymbol{u}]$

($\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta_i}$ は余計因子 (次頁で例示) の多くを除去

ＰＲＳ法を疎な二多項式系に適用すると…

$$\textbf{Ex.I}\ \begin{cases} G = x^{10}y^3z^3 + x^5\,(3\,y^4 - 3\,z^4) - 9\,yz, \\ H = x^{10}y^3z^3 - x^5\,(2\,y^4 - 2\,z^4) - 4\,yz. \end{cases}$$

$\mathbf{PRS}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$ の結果は

$$\boldsymbol{-\,9765625\,y^{20}z^{20}\,(3\,y^4 - 2\,z^4)^5\,(2\,y^4 - 3\,z^4)^5}$$

イデアル $\langle\{G, H\}\rangle$ の最低元 $\boldsymbol{\widehat{S}_2}$ は

$$\boldsymbol{yz \times (6\,y^8 - 13\,y^4z^4 + 6\,z^8)}$$
$$\boldsymbol{=\ yz\,(3\,y^4 - 2\,z^4)\,(2\,y^4 - 3\,z^4)}$$

- $\mathbf{PRS}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})/\boldsymbol{\widehat{S}_2}$ は余計因子 (extraneous factor)
- PRS を **sparsePRS** にすれば余計因子は大幅減少

$\widehat{S}_2$ は PRS と extndedPRS で計算可能？

Ex.II $\begin{cases} G = x^4\times(y^2+yz) + x^2\times(y^2-yz) + (y^2+yw), \\ H = x^4\times(yz+z^2) - x^2\times(yz+z^2) + (z^2-zw). \end{cases}$

Buchberger算法を上記系に適用すると，

$$\boldsymbol{P_6 = (y-z)\,\widehat{S}_2}, \cdots, \boldsymbol{P_8 = w\,\widehat{S}_2},\ \boldsymbol{P_{11} = \widehat{S}_2}$$

ここで，$\widehat{S}_2$ は次の多項式である：

$$3y^4z + 3y^3z^2 + 4y^3zw - 3y^2z^3 + 4y^2z^2w + 4y^2zw^2$$

$\boldsymbol{P_i = A_iG+B_iH}$ を満たす $\boldsymbol{(A_i, B_i)}$ を計算する：

たとえば，$\boldsymbol{A_6, B_6}$ は次の多項式となる

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_6} &= x^2\times(-y^3z - y^2z^2) + (2y^3z + y^2z^2 + yz^3) \\ \boldsymbol{B_6} &= x^2\times(y^3z + y^2z^2) + (\,y^4 + y^3z + 2y^2z^2) \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{A_{11}, B_{11}})$ を見ると，驚愕する事実が $\cdots$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_{11}} &= \boldsymbol{x^6}\times(8y^2z - 8z^3) \\ &+ \boldsymbol{x^4}\times(-8y^2z + 4yz^2 - 8yzw + 12z^3 - 8z^2w) \\ &+ \boldsymbol{x^2}\times(-2y^2z + 2yz^2 - 12z^3 + 16z^2w) \\ &+ (3y^2z + 2yz^2 + 2yzw + 3z^3 - 10z^2w + 8zw^2) \\ \boldsymbol{B_{11}} &= \boldsymbol{x^6}\times(-8y^3 + 8yz^2) \\ &+ \boldsymbol{x^4}\times(-8y^3 + 12y^2z + 8y^2w - 12yz^2 + 8yzw) \\ &+ \boldsymbol{x^2}\times(-6y^3 + 6y^2z + 4yz^2) \\ &+ (\,y^3 - 6y^2z + 6y^2w + yz^2 - 6yzw + 8yw^2) \end{aligned}$$

$\widetilde{A} := \mathbf{rem}(\boldsymbol{A_{11}, H}),\ \widetilde{B} := \mathbf{rem}(\boldsymbol{B_{11}, H}) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x, y, z, w}]$

$\widetilde{A}G + \widetilde{B}H = \widehat{S}_2$ かつ次数条件ＯＫ $\Longrightarrow$ $\widehat{S}_2$が決まる

次数条件：$\deg(\widetilde{A}) < \deg(H),\ \deg(\widetilde{B}) < \deg(G)$

二多項式系 $\{G, H\}$ に対する主定理

定理 1 (S & Inaba, SYNASC 2017)

$G, H \in \mathbb{K}[x, \boldsymbol{u}]$ は互いに素で $\deg_x(G) \ge \deg_x(H)$。
$\boldsymbol{P_k} \in \mathbb{K}[\boldsymbol{u}]$ は $\mathrm{PRS}_x(G, H)$ の最終要素で，$\boldsymbol{A_k}, \boldsymbol{B_k}$ は $\underline{A_k G + B_k H = P_k}$ と次数条件を満たすとする。
$\boldsymbol{\widehat{S}_2}$ はイデアル $\langle\{G, H\}\rangle$ の最低元，その "CofGs" を $\boldsymbol{\widetilde{A}}, \boldsymbol{\widetilde{B}}$ とする：$\underline{\widetilde{A}\, G + \widetilde{B}\, H = \widehat{S}_2}$ 。
$\boldsymbol{\widetilde{A}}$ と $\boldsymbol{\widetilde{B}}$ が次数条件を満たせば，次式が成立する:

$$\boldsymbol{P_k / \gcd(\mathrm{cont}(A_k), \mathrm{cont}(B_k)) = c\widehat{S}_2}$$

満たさない場合，$\boldsymbol{\widetilde{A}}$ と $\boldsymbol{\widetilde{B}}$ を十分次数低減できる。

解説 と $\boldsymbol{\gamma = \gcd(\mathrm{lcf}(G), \mathrm{lcf}(H))}$

- $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ が次数条件を満たせば，$\left(\underline{G \sim H} \Leftrightarrow \underline{uG = vH\ (uv \neq 0)}\right)$
  $(A_k, B_k, P_k) \sim (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widehat{S}_2)$ が成立 $\Rightarrow$ 定理の前半
- しかし，次数条件が満たされることは，ほとんどない。
- $\boldsymbol{\gamma = 1}$ なら，$\widetilde{A}G + \widetilde{B}H = \widehat{S}_2 \Rightarrow \mathrm{ltm}(\widetilde{A}G) + \mathrm{ltm}(\widetilde{B}H) = 0$
  $\Rightarrow \widetilde{A} = QH + \widetilde{A}',\ Q = \mathrm{ltm}(\widetilde{A})/\mathrm{ltm}(H), \deg(\widetilde{A}) > \deg(\widetilde{A}')$
  これを繰り返せば，次数条件を満足させられる。
- 問題は $\boldsymbol{\gamma \neq 1}$ の場合である。この場合(後に示すが)，
  $\underline{\mathrm{TrmElim}(P_{i-1}, P_i)}$ を実行する度 $\mathrm{lcf}(P_{i-1})$ に含まれる
  $\underline{\boldsymbol{\gamma}\ \text{の因子}}$ (の一部) が $\mathrm{ltm}(A_{i+1})$ と $\mathrm{ltm}(B_{i+1})$ に移る。

多項式表現：単項表現 と 再帰表現

$$(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ (\boldsymbol{x}') = (x_2, \ldots, x_m)$$
$$(\boldsymbol{u}) = (u_1, \ldots, u_n)$$

単項表現 ： 多項式を単項式の和として表現する

$$F = M_1 + \cdots + M_k,\ \ M_1 \succ \cdots \succ M_k$$
$$M_i = c_i\, x_1^{d_{i,1}} \cdots x_m^{d_{i,m}}\, u_1^{e_{i,1}} \cdots u_n^{e_{i,n}}$$
$$\underline{\mathbf{lmn}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M_1}},\quad \underline{\mathbf{lc}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{c_1}}$$

再帰表現 ： 従変数部分を再帰的に係数に含める

$$F = f_d(\boldsymbol{u}')\, \boldsymbol{x_1^d} + \cdots + f_0(\boldsymbol{u}')\, \boldsymbol{x_1^0}$$

各係数 $\boldsymbol{f_i}$ も下位変数で再帰的に

$$\underline{\mathbf{ltm}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{f_d}\, \boldsymbol{x_1^d}},\quad \underline{\mathbf{lcf}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{f_d}}$$

主単項消去 と 主項消去

単項消去 ： 単項表現における先頭単項の消去

前記 F と $F' = M_1' + \cdots + M_{k'}'$ に対し

$$\mathbf{Spol}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}) = (\mathbf{lmn}(\boldsymbol{F'})/\boldsymbol{C})\, \boldsymbol{F} - (\mathbf{lmn}(\boldsymbol{F})/\boldsymbol{C})\, \boldsymbol{F'}$$
$$\text{where}\ \ \boldsymbol{C} = \mathbf{gcd}(\mathbf{lmn}(\boldsymbol{F}), \mathbf{lmn}(\boldsymbol{F'}))$$

主項消去 ： 再帰表現における先頭項の消去

前記 F と $F' = f'_{d'}\, x_1^{d'} + \cdots + f'_0$ に対し

$$\mathbf{Elim}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F'}) = (\mathbf{ltm}(\boldsymbol{F'})/\boldsymbol{C})\, \boldsymbol{F} - (\mathbf{ltm}(\boldsymbol{F})/\boldsymbol{C})\, \boldsymbol{F'}$$
$$\text{where}\ \ \boldsymbol{C} = \mathbf{gcd}(\mathbf{ltm}(\boldsymbol{F}), \mathbf{ltm}(\boldsymbol{F'}))$$

Knuth-Bendix の臨界対の観点では

Spol($\boldsymbol{G, H}$) ： 単項表現での臨界対 (critical pair)
1965 年，Buchberger が発見
$\Longrightarrow$ 以後,**Gröbner 基底論**が大発展

Elim($\boldsymbol{G, H}$) ： 再帰表現での臨界対 (critical pair)
(TrmElim の略) 1993 年，T. Sasaki が指摘
近年になって注目を集め始めた
： ＰＲＳより根源的なことは明白
$\Longrightarrow$ 二多項式系のＴＥＳを調べよう

ＴＥＳ に関する 記号一覧

($\mathbf{Elim}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}) := [\mathbf{lcf}(\boldsymbol{H})/\gamma]\,\boldsymbol{G} - [\mathbf{lcf}(\boldsymbol{G})/\gamma]\boldsymbol{x}^{\delta}\boldsymbol{H}$)

G, H ： $\in \mathbb{K}[x, \boldsymbol{u}]$, $\deg_x(G) \geq \deg_x(H)$, 互いに素
： called **operand** and **eliminator**

TES(G, H) ： $(P_1 = G,\ P_2 = H,\ P_3,\ P_4,\ \ldots,\ P_k \in \mathbb{K}[\boldsymbol{u}])$
$\boldsymbol{P_{i+1}} := \mathbf{TrmElim}(\boldsymbol{P_{i-1}}, \boldsymbol{P_i})$

$\boldsymbol{\gamma_i} = \mathbf{gcd}(\mathbf{lcf}_x(\boldsymbol{P_{i-1}}), \mathbf{lcf}_x(\boldsymbol{P_i}))$

$\boldsymbol{\delta_i} = \mathbf{deg}_x(\boldsymbol{P_{i-1}}) - \mathbf{deg}_x(\boldsymbol{P_i})$

CofGs ： Coefficients-of-Generators ($\Leftarrow$ new name)
$((1, 0),\ (0, 1),\ (A_3, B_3),\ (A_4, B_4),\ \ldots,\ (A_k, B_k))$
satisfying $\boldsymbol{A_i G + B_i H = P_i}$ for $\forall i$

ＴＥＳ の基本的な生成規則

($\boldsymbol{P_{i+1}} := \mathbf{TrmElim}(\boldsymbol{P_{i-1}}, \boldsymbol{P_i})$)

規則１ ： operand $\boldsymbol{P_{i-1}}$ は基底の最大次数元とする
： eliminator $\boldsymbol{P_i}$ は基底の第二次数元とする
$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P_{i-1}}$ と $\boldsymbol{P_i}$ から $\boldsymbol{P_{i+1}}$ を生成する

規則２ ： $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P_{i-1}}$ を現基底から削除する

規則３ ： $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P_{i+1}}$ を新基底に追加する

$\boxed{\mathbf{TES}_x(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})\ \text{では，}\ \boldsymbol{i}\ \text{によらず基底の元数は２}}$

ＴＥＳ の基本的性質

性質Ａ ： $\mathbf{deg}(\boldsymbol{P_{i+1}}) < \mathbf{deg}(\boldsymbol{P_{i-1}})$ $(i \geq 2)$
$\Leftarrow$ $d_{i-1} = d_i,\ d_{i-1} > d_i$ 両場合で成立

性質Ｂ ： **operand** は現基底の次数最大の元だが，
複数個の可能性あり (同次数の場合)
$\Longrightarrow$ ＴＥＳは二つに枝分かれする

性質Ｃ ： 同じ式を複数回 **eliminator** に使うことも
$(\mathbf{deg}_x(\boldsymbol{P_{i-1}}) \geq \mathbf{deg}_x(\boldsymbol{P_i}) + \mathbf{2}$ が必要)
$\Longrightarrow$ ＴＥＳを **abnormal** と呼ぶ

枝分かれ(branching)の場合を詳しく

(すなわち，$\deg_x(P_{i-1}) = \deg_x(P_i)$ の場合)

P_{i+1} ： ±因子を除き operand 選択 に依らない

$\Leftarrow\ \mathrm{Elim}(P_{i-1}, P_i) = -\mathrm{Elim}(P_i, P_{i-1})$ ゆえ

P_{i+2} ： operand 選択 の差が現れる

$P_{i+1} = \mathrm{Elim}(P_{i-1}, P_i) \ \Rightarrow\ P_{i+2} = \mathrm{Elim}(P_i, P_{i+1})$

$P_{i+1} = \mathrm{Elim}(P_i, P_{i-1}) \ \Rightarrow\ P_{i+2} = \mathrm{Elim}(P_{i-1}, P_{i+1})$

いずれの場合も $P_{i+3} = \mathrm{Elim}(P_{i+1}, P_{i+2})$

対処法 ： 枝分かれを全て辿れば最低順位終結式を得る

Abnormal な場合を詳しく

$\left(\begin{array}{l}\text{TES}_x(G, H)\ \text{が先頭で abnormal となる} \\ \text{必要十分条件は}\ G' = \mathrm{Elim}(G, x^{\delta_2}H)\ \text{が} \\ \text{条件}\ \deg_x(G') \geq \deg_x(H)\ \text{を満たすこと}\end{array}\right)$

$\Downarrow$

1) ： 上記条件が続く限り，eliminator は H

ＴＥＳの生成公式は意外に簡単

しかも，定理１の証明に無関係

(これらは後ほど具体的に示す)

2) ： 枝分かれは起きても abnormal の最後

$\boxed{\text{CofGs (normal TES の場合)}}$

$$\left(P_{i+1} := [\mathrm{lcf}(P_i)/\gamma_i]\, P_{i-1} - [\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i} P_i \right)$$

$$\Downarrow$$

$$(A_1, A_2) = (1, 0), \quad (B_1, B_2) = (0, 1)$$

$$A_{i+1} := [\mathrm{lcf}(A_i)/\gamma_i]\, A_{i-1} - [\mathrm{lcf}(A_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i} A_i$$

$$B_{i+1} := [\mathrm{lcf}(B_i)/\gamma_i]\, B_{i-1} - [\mathrm{lcf}(B_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i} B_i$$

$$\deg(A_k) = \delta_3 + \cdots + \delta_{k-1} = \deg(H) - \deg(P_{k-1})$$

$$\deg(B_k) = \delta_2 + \cdots + \delta_{k-1} = \deg(G) - \deg(P_{k-1})$$

公式III
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{ltm}(A_{i+1}) = -[\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i}\, \mathrm{ltm}(A_i) \\ \mathrm{ltm}(B_{i+1}) = -[\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i}\, \mathrm{ltm}(B_i) \end{array}}$$

$\boxed{\text{CofGs (abnormal TES の場合)}}$

$$\begin{pmatrix} P'_{1+j} := [\mathrm{lcf}(P_2)/\gamma'_j]\, P'_j - [\mathrm{lcf}(P'_j)/\gamma'_j]\, x^{\delta'_j} P_2 \\ \gamma'_j = \gcd(\mathrm{lcf}(P'_j), \mathrm{lcf}(P_2)), \ \ \delta'_j = \deg(P'_j) - \deg(P_2) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(A'_1,\ B'_1) := (1,\ 0), \quad (j = 1, \ldots, r) \ \text{below}$$

$$\begin{aligned} A'_{1+j} &= [\mathrm{lcf}(P_2)/c'_j]\, A'_j = [\mathrm{lcf}(P_2)/c'_j] \cdots [\mathrm{lcf}(P_2)/c'_1] \\ B'_{1+j} &= [\mathrm{lcf}(P_2)/c'_j]\, B'_j - [\mathrm{lcf}(P'_j)/c'_j]\, x^{\delta'_j} \\ &= -[\mathrm{lcf}(P_2)/c'_j] \cdots [\mathrm{lcf}(P_2)/c'_1]\, x^{\delta'_1} \\ &\qquad\qquad - \cdots - [\mathrm{lcf}(P'_j)/c'_j]\, x^{\delta'_j} \end{aligned}$$

$$A'_{i+j} = \mathrm{ltm}(A'_{i+j}), \quad \mathrm{ltm}(B'_{1+j}) = -\mathrm{ltm}(A'_{1+j})\, x^{\delta'_1}$$

γ はどうなる？ (normal TES の場合)

(公式III (以下に再掲) が教えてくれる)

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{ltm}(A_{i+1}) = -[\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i}\, \mathrm{ltm}(A_i) \\ \mathrm{ltm}(B_{i+1}) = -[\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]\, x^{\delta_i}\, \mathrm{ltm}(B_i) \end{array} \right)$$

γ の因子 $\hat{\gamma}$ は，$\mathrm{lcf}(P_{i-1})$ の因子だが，$\mathrm{lcf}(P_i)$ の因子ではないとする。$\gamma_i = \gcd(\mathrm{lcf}(P_{i-1}), \mathrm{lcf}(P_i))$ であるから，$\hat{\gamma}$ は $[\mathrm{lcf}(P_{i-1})/\gamma_i]$ の因子である。
公式III より，このことは $\mathrm{lcf}(P_{i-1})$ の因子 $\hat{\gamma}$ が A_{i+1} と B_{i+1} の<u>主項に飛び移る</u>ことを意味する。

γ はどうなる？ (abnormal TES の場合)

(公式III と同種の公式は全く役に立たない)
(しかし，全く別の観点から簡単明瞭に解る)

$$P'_{1+j} := [\mathrm{lcf}(P_2)/\gamma'_j]\, P'_j - [\mathrm{lcf}(P'_j)/\gamma'_j]\, x^{\delta'_j} P_2$$

$j = 1$ ： $P'_1 = G,\ P_2 = H$ ゆえ $\gamma'_1 = \gamma$ である

$j > 1$ ： 一般に $\mathrm{lcf}(P'_j)$ は γ を因子には持たない

： しかし $[\mathrm{lcf}(P_2)/\gamma'_j]\,\mathrm{lcf}(P'_j)$ 全体 は持つ

$\Rightarrow$ そこで，足りない分を $\mathrm{lcf}(P'_j)$ に掛ける

まとめ：$P'_1 \Rightarrow P'_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P'_r$ の過程中 $\mathrm{lcf}(P'_j) = \gamma$

ＴＥＳ と ＧＢ基底法 との関係 I

（終結式法とＧＢ法の関係づけは長年の課題）
（その課題がＴＥＳを使うと簡単に解決する）

G, H に対し，$d = \deg_x(G) \geq \deg_x(H) = e$，$\delta = d - e$，
$\boldsymbol{E_1} := \underline{\mathrm{TrmElim}(G, x^\delta H)}$，$\widehat{\boldsymbol{E}}_1$ は $\mathrm{ltm}(G)$ と $\mathrm{ltm}(x^\delta H)$
だけを $\underline{\text{Buchberger 算法}}$で消去したものとする。叩し，
$\boldsymbol{x^d}$ 項を消去した結果式は，$\underline{\text{消去には使わない}}$とする。
すると，$\widehat{\boldsymbol{E}}_1 = \boldsymbol{c E_1}$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{K}$ が成立する。

(簡単に)　$\boldsymbol{E_1}$ が最小なのは TrmElim の定義より明白。
$[\mathrm{lcf}(H)/\gamma]$ と $[\mathrm{lcf}(G)/\gamma]x^\delta$ の単項式表現より
$\widehat{\boldsymbol{E}}_1$ が Spol とＭ簡約で具体的に表現できる。

上記の命題に対する簡単な例題

$$\begin{cases} G := x^4 \times (y+u) + x^2 \times (y-2w) + (2u+w), \\ H := \underline{\overline{x^4 \times (y-w)}} + x^2 \times (2y+u) + (u-2w). \end{cases}$$

Buchberger 算法での $\widehat{\boldsymbol{E}}_1$ の計算例：

(we put $\boldsymbol{R_G := \mathrm{rest}(G)}$ and $\boldsymbol{R_H := \mathrm{rest}(H)}$)

$\boldsymbol{G} = \underline{2}x^4y + x^4u + R_G$,　　$\boldsymbol{H} = \underline{2}x^4y - x^4w + R_H$,

$\mathbf{Spol}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}) = G - H = \underline{2}x^4u + x^4w + R_G - R_H \;\Rightarrow\; \boldsymbol{G_3}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Spol}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G_3}) &= -\underline{2}x^4yw + x^4u^2 - (y-u)\,R_G + (y+w)\,R_H \\ &\xrightarrow{H} \underline{2}x^4u^2 - x^4w^2 - (y-u)\,R_G + (y+w)\,R_H \\ &\xrightarrow{G_3}\!\!\!\!\rightarrow -(y-w)\,R_G + (y+u)\,R_H \;\Rightarrow\; \widehat{\boldsymbol{E}}_1, \end{aligned}$$

$\mathbf{Spol}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G_3}) = \cdots \xrightarrow{G} -(y-w)\,R_G + (y+u)\,R_H = \widehat{\boldsymbol{E}}_1.$

続：ＴＥＳ と ＧＢ基底法 との関係 II

本頁では，$F\rfloor_{e'}$ は F の次数 e' 以上の項の和を意味する

$e \ge e' > 0$ なる任意の指数 e' に対し $G\rfloor_{e'-1} - G\rfloor_{e'}$ と $H\rfloor_{e'-1} - H\rfloor_{e'}$ の少くとも一方は０でないとする。$E_{e'}$ および $\widehat{E}_{e'}$ は $G\rfloor_{e'}$ と $H\rfloor_{e'}$ の全項をそれぞれＴＥＳ法 および Buchberger 算法で消去した結果式とする。ただし，$E_{e'}$ は全ての枝を辿って最小順序多項式に定め，消去の結果式は消去には使わない。すると，$E_{e'} = c\widehat{E}_{e'}$, $c \in \mathbb{K}$ が成立する。

$E_{e'} = c\widehat{E}_{e'}$ の証明

- 上記をグレブナー基底論で証明するのは実は厄介 ＧＢは，指定項消去後の結果式も消去に使うから。
- $E_{e'}$ の計算手順を利用すれば明快に証明できる： $E_{e'}$ の計算 ⇒ $E_{e'} = A_{e'}G + B_{e'}x^{\delta}H$ が定まり，$(A_{e'}, B_{e'})$ は定義より $E_{e'}$ に至る最短経路を示す。
- そこで，最短経路を辿って $\widehat{E}_{e'}$ を計算すればよい 例えば，$A_1 = \mathrm{lmn}(A_1) + \mathrm{rst}(A_1)$ 等と分割すれば，$\mathrm{lmn}(A_1)G + \mathrm{lmn}(B_1)H$ は $\mathrm{Spol}(G, H)$ の倍数だ。

終結式の彼方 … 何があるんだろう？

- 最初は興味本位：
  $G=g_d x^d+\cdots+g_0,\quad H=h_e x^e+\cdots+h_0$
  $\hat{\gamma}\notin\mathbb{K}$ に対し $\hat{\gamma}\,|\,\boldsymbol{P_{k-1},A_k,B_k}$ の場合あり
- ＴＥＳ $(\boldsymbol{P_1=G,P_2=H,P_3,\ldots,P_k}\in\mathbb{K}[\boldsymbol{u}])$
  $\deg_x(A_k)<\deg_x(H),\ \ \deg_x(B_k)<\deg_x(G)$
- そこで，$\boldsymbol{P_{k+1}:=\mathrm{TrmElim}(P_{k-1},P_k)}$ を計算
  $\underline{\deg(A_{k+1})=\deg(H)},\ \ \underline{\deg(B_{k+1})=\deg(G)}$

♠ そうか，ＧＢ基底計算同様，延々と続くんだ！
延々と続けると，いいことがあるかもな！

因みに Characteristic Set では

GB 基底法はＳ多項式生成とＭ簡約で与系 $\mathcal{F}$ を変形していくが，**Char. Set** 法は，これら両演算の代りに擬除算 **(Prem)** だけで $\mathcal{F}$ を変形していく。算法としては両者は同じようだが，結果は大きく異なる。

ＧＢ法との違いはイデアル所属問題をみれば明白

$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ の Char. Set を $\boldsymbol{\mathcal{C}=\{C_1,\ldots,C_r\}}$ とし，
$\forall\boldsymbol{F}\in\mathbb{K}[\boldsymbol{x,u}]$ の $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ による擬除算簡約を次式とする。

$$\mathrm{lcf}(C_{i_1})^{e_1}\cdots\mathrm{lcf}(C_{i_r})^{e_r}\times F\ =\ Q_1C_{i_1}+\cdots+Q_rC_{i_r}+\widetilde{F}$$

定理 $\boldsymbol{F\in\langle\mathcal{F}\rangle\Longrightarrow\widetilde{F}=0}$ $\quad(\Longleftarrow\widetilde{F}=0$ ではない$)$

文献

本講演は下記論文(投稿中)の最初の約 1/3 の纏めです

A Bridge between Euclid and Buchberger

(国際会議 SCSS2021 (held at RISC Linz) での招待講演)

残りの 2/3 は多多項式系のグレブナー基底の各元の小倍数をＳ多項式計算なしで計算するという画期的なものです。奇想天外かつ簡単で強力なアイデアのてんこ盛りです。興味ある人は e-mail ください。

(なお，この研究での私の役割はほぼ終了しました)

謝辞

ご清聴ありがとうございました。

研究過程で，加古富士雄氏 (前 奈良女子大学教授)，稲葉 大樹氏 (数学検定協会)，讃岐 勝氏 (筑波大学) の三氏に非常にお世話になりました。

深く感謝申し上げます。