Computer Algebra—Foundations and Applications
マンハッタン距離ボロノイ図からの母点探索[1]

東京理科大学　理学研究科 応用数学専攻

山中 悠輔, 武田 渉, 関川 浩

2022 年 12 月 21 日（水）

[1]本研究は科研費 21K11760 の助成を受けたものである

目次

研究動機

○既存の研究

- ボロノイ図から通常とは逆に母点を求める
- 平面分割図形からそれに近いボロノイ図を求める

どちらもユークリッド距離におけるもの

$$\Downarrow$$

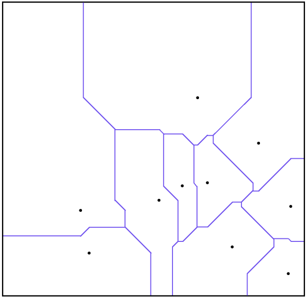
現れる形が決まっている点でマンハッタン距離の方が
より扱いやすいのでは？

本研究で取り扱う問題

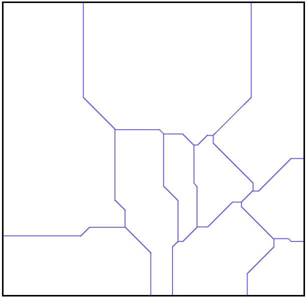
通常、ボロノイ図と呼ばれる縄張りを表した図は、母点が与えられて初めて作成される。

問題

Q. もし母点の情報を失ったボロノイ図が与えられた場合、どのように母点を探索すれば良いのか？



通常は母点からボロノイ図を作成



母点を失ったボロノイ図

定義 1/2

ボロノイ領域

平面上に n 個の点の集合 $\{p_1, \cdots, p_n\}$（各点 p_i を母点と呼ぶ）が与えられている時、p_i までの距離 $d(x, p_i)$ が最短となる点 x からなる領域

$$V(p_i) = \{x \mid d(x, p_i) \le d(x, p_j), \forall j \ne i\}$$

を母点 p_i のボロノイ領域という。

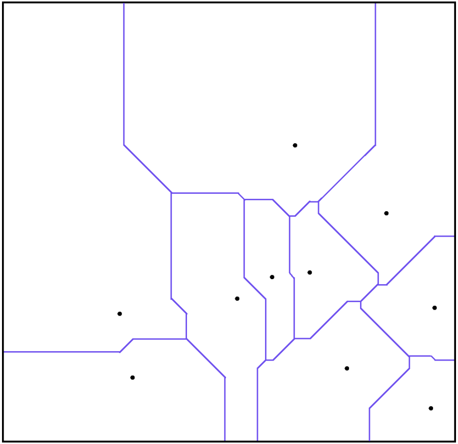
ボロノイ辺、ボロノイ点、頂点、次数

- ボロノイ辺 ···2 つのボロノイ領域に共通な境界をなす辺
- ボロノイ点 ···3 つ以上のボロノイ領域に共通な境界をなす点
- 頂点 ··· ボロノイ点、枠とボロノイ辺の交点、後に述べる屈曲点を合わせたもの
- 次数 ··· ボロノイ点に接続する辺の本数

定義 2/2

マンハッタン距離

$$d(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (p_1 = (x_1, y_1),\ p_2 = (x_2, y_2))$$



マンハッタン距離ボロノイ図

本研究で取り扱う問題（再掲）

今回追加した条件 $\cdots$

- 与えられた図がボロノイ図であると分かっている。
- 母点が全て枠の中に含まれていると分かっている。
- 全ての母点の x 座標は異なる（y 座標に関しても同様）。
- ２つの母点を結んだ直線の傾きは ± 1 ではない。
- ボロノイ点の次数は 3 のみ。

条件設定をした問題

母点が不明なマンハッタン距離ボロノイ図から母点を得ることが可能か？

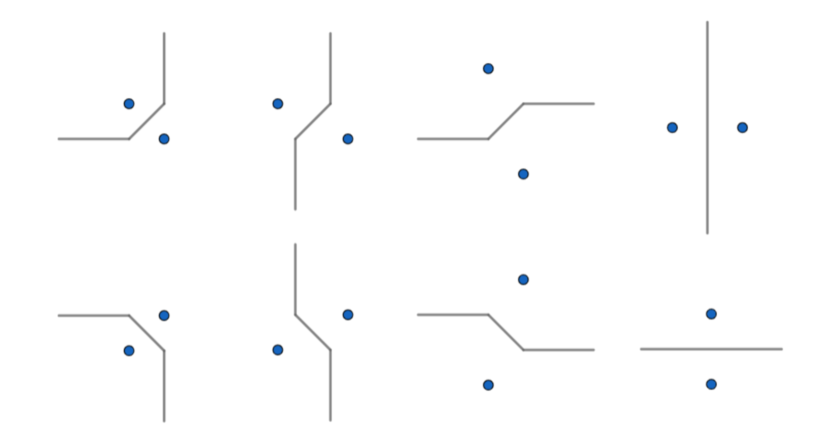
枠

長方形かつ水平、垂直な辺が与えられた図の境界を枠と定義。
前スライドの黒い太線。

性質 1/7

性質 1 (2003, Giuseppe Liotta, Henk Meijer [1])

母点が 2 つのマンハッタン距離ボロノイ図は 8 種類のみであり、それらの唯一のボロノイ辺は水平、垂直、傾き ± 1 からなる。



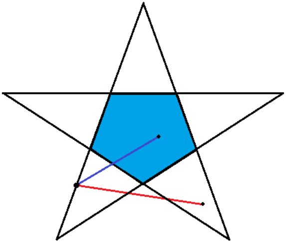
性質 2/7

性質 2 (2003, Giuseppe Liotta, Henk Meijer [1])

マンハッタン距離ボロノイ図における各ボロノイ領域 $V(p_i)$ は星型多角形であり、母点 p_i は kernel 内に存在。

星型多角形

以下のような、他の辺と交差しないように辺上の任意の点と結ぶことの出来る青い部分（kernel）が存在する多角形。

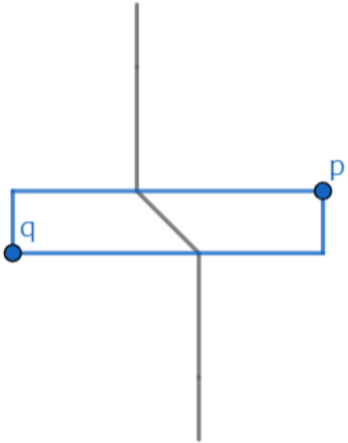


Kernel 以外では辺と交差（赤線）する

性質 3/7

性質 3 (2003, Giuseppe Liotta, Henk Meijer [1])

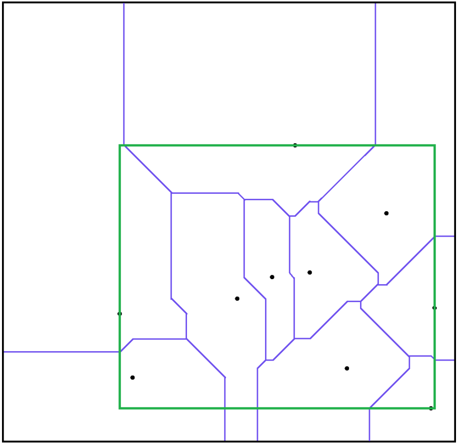
2 つの母点を隣り合わない頂点とする、水平、垂直な辺からなる長方形をとると、ボロノイ辺の傾き ±1 の部分はちょうど長方形に収まる。



性質 4/7

性質 4 (2022, Y)

全ての母点が枠内に含まれるとき、ボロノイ辺の傾き ±1 の部分も全て枠内に含まれる。

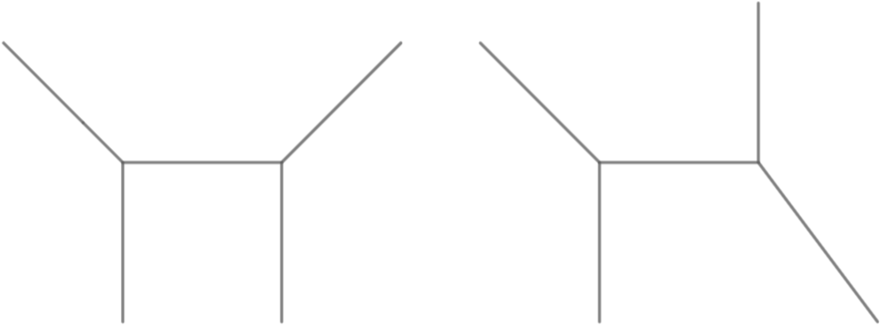


緑色の線は傾き ±1 の部分を囲う最小の長方形

性質 5/7

性質 5 (2022, Y)

ボロノイ点同士を結ぶ水平または垂直な線のみの線分は存在しない。



現れることの無い形

性質 6/7

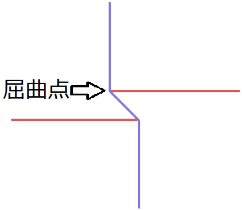
性質 6 (2022, Y)

ボロノイ辺のみで囲まれた領域にはヒント線が 4 本存在する。

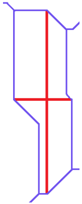
屈曲点とヒント線

屈曲点はボロノイ点でも枠線とボロノイ辺の交点でもない角度が変わる点のことを指す。

ヒント線は屈曲点から伸びる水平または垂直な、母点の候補を含む線分のこと。（下図を参照）



赤線がヒント線

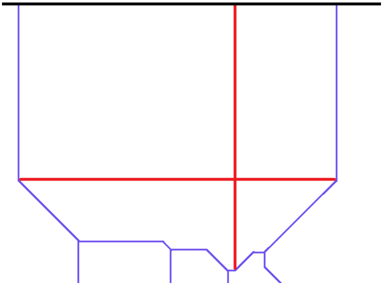


ボロノイ辺のみで囲まれた領域

性質 7/7

性質 7 (2022, Y)

枠の一部が含まれる領域ではヒント線が 3 本、または直交する 2 本が存在する。



性質 7 の一例

性質からなぜ母点が求まるのか？

与えられた図から全てのヒント線を得ることが出来る（性質 4）

$$\Downarrow$$

全てのボロノイ領域においてヒント線が交差する（性質 6, 7）

$$\Downarrow$$

元の平面分割がボロノイ図であると分かっているため、
それらは必ず母点になる。

母点でないのに交差した場合、性質 1 で述べた 8 種類の例に存在しない形が現れるため矛盾。

提案するアルゴリズム

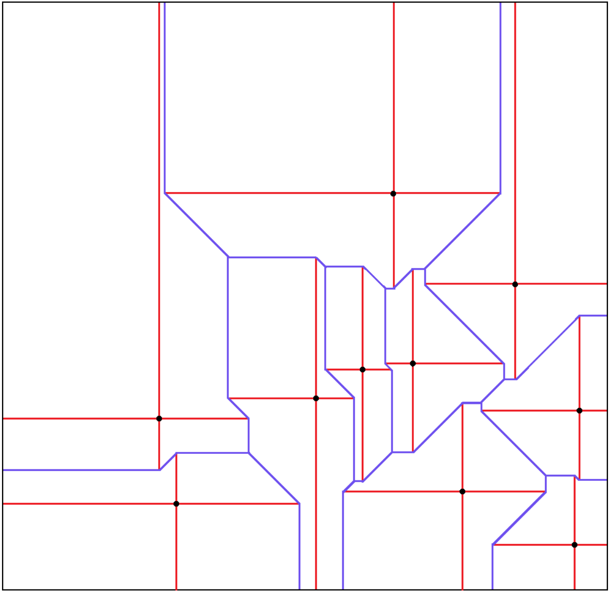
- 入力　各頂点の情報（頂点番号, 座標, 頂点の種類, 頂点周辺の領域と角度, 隣り合う頂点の番号と座標）
- 出力　母点の座標

1. 頂点を一つとる。
2. その点が屈曲点かつ角度が 135° かどうかチェック。
3. その両隣の点が屈曲点かどうかチェックし、屈曲点でないならその頂点の座標からわかる適切な母点の座標を得る。
   屈曲点なら次の頂点へ移動し 2 へ。
4. 全ての頂点を探索したら得た母点の座標を出力し終了。

アルゴリズムの概要

全ての頂点を巡る際にヒント線が現れるかをチェックし、
現れた場合にその頂点の座標から適切な母点の座標を求めている。

視覚化した例



計算量と計算誤差

頂点数を n とすると、全ての頂点を一巡するだけで済む事から
アルゴリズムの計算量は $O(n)$。

このアルゴリズムでは母点の座標を求める際に、頂点の各座標の値を
用いるだけであるため計算誤差は発生しない。

条件の一部を無くした場合

条件として挙げていた

- 与えられた図がボロノイ図であると分かっている。
- 全ての母点の x 座標は異なる（y 座標に関しても同様）。

を削除。

新たな問題

- 与えられた図がボロノイ図かどうかの判定
- ボロノイ領域内でヒント線が交差しないがボロノイ図になる（母点が一意に定まらない）場合の探索法

$$\Downarrow$$

現れる図の場合分けが必要。

場合分け

与えられた図の種類

条件の一部を無くした場合に現れるボロノイ図は以下の三通り。

1. 全ての領域でヒント線が交差（条件付きの時と同じ）
2. ヒント線が現れない or 交差しない
3. ヒント線が最低一つは交差する場合（上記二つの中間）

○方針

- 先ほどまでのアルゴリズムでヒント線を得る。
- 上記３つの場合について、母点を得る処理を行う。
- 得た点が本当に母点かチェックをする。

1. 全ての領域でヒント線が交差した時

1. ヒント線から得られた点を用いてボロノイ図を構築する。
2. それが与えられた図と一致すれば、得た点は母点である。

枠外も一致するのか

- 傾き ± 1 の線分 ··· 性質 4 から存在しない。
- 枠内から延長する形で存在しない水平垂直な半直線 ··· 母点が枠外に必要なため存在しない

よって構築したボロノイ図が与えられた図と一致すれば、枠外も一致する。

性質 4 （再掲）

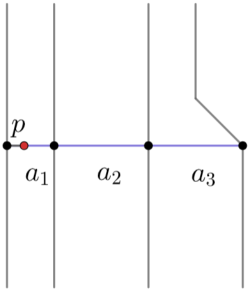
全ての母点が枠内に含まれるとき、ボロノイ辺の傾き ± 1 の部分も全て枠内に含まれる。

2. ヒント線が現れない or 交差しない場合

ヒント線が現れない or 交差しない場合、母点の位置は不定となる（下図）。

ただし線分の間の長さを a_i、左端から母点までの距離を p、
k を 1 から i とするとボロノイ図の性質から、以下が成り立つような位置に母点は存在する。

$$(-1)^k p > (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i a_i$$

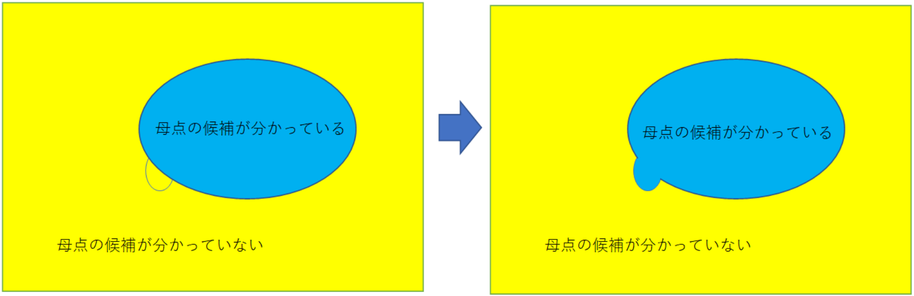


左図では以下をすべて満たす位置に母点は存在

- $p < a_1$
- $p > a_1 - a_2$
- $p < a_1 - a_2 + a_3$

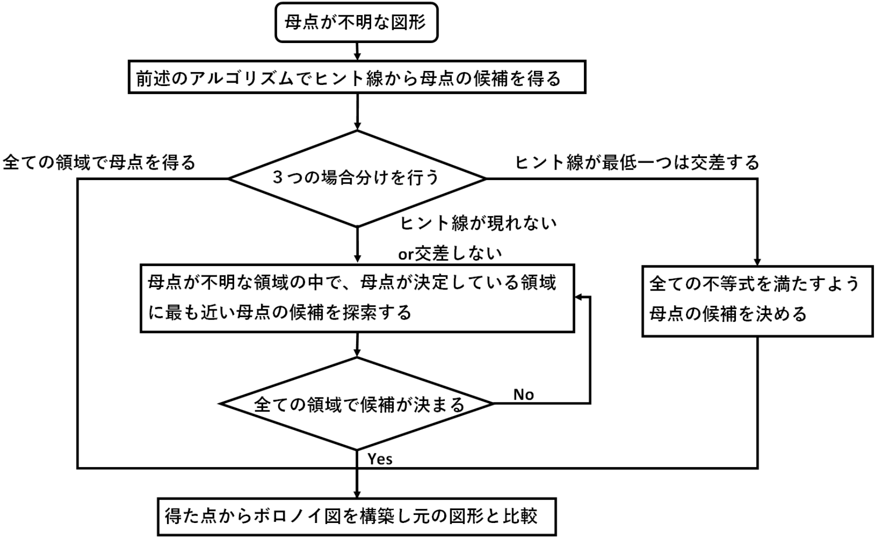
3. ヒント線が最低一つは交差する場合

1. 母点の候補が分かっている領域とそうでない領域に分かれる。
2. そうでない領域の中で、母点の候補が分かっている領域に最も近い母点を探索し、分かっている領域を広げる。
3. これを繰り返していく。



母点の候補が分かる領域を増やしていく

判定の流れ



母点が不明な図形
前述のアルゴリズムでヒント線から母点の候補を得る
全ての領域で母点を得る
3つの場合分けを行う
ヒント線が最低一つは交差する
ヒント線が現れない
or交差しない
母点が不明な領域の中で、母点が決定している領域
に最も近い母点の候補を探索する
全ての不等式を満たすよう
母点の候補を決める
全ての領域で候補が決まる
No
Yes
得た点からボロノイ図を構築し元の図形と比較

結論と課題

○結論

- 条件を設定し、マンハッタン距離ボロノイ図であると分かっている場合の母点探索において、誤差無く母点を得ることが出来た。
- その条件を緩め元の図形がボロノイ図か不明とした場合についても、母点を探索することが出来た。

○課題

- ヒント線から得た点が母点か確認するため、最後にボロノイ図を構築する操作がある。
  これを無くすにはマンハッタン距離ボロノイ図であることの必要十分性が何かの確認がいる。

参考文献

[1] Giuseppe Liotta, Henk Meijer, Voronoi Drawings of Trees, Computational Geometry 24 (2003), 147–178

[2] David Hartvigsen, Recognizing Voronoi Diagrams with Linear Programming, Informs Journal on Computing 4(4) (1992), 369–374