2022/12/19

RIMS研究集会
Computer Algebra -- Foundations and Applications

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

ゲーム理論における数式処理の応用

– 数式処理システムを用いたナッシュ交渉解の応用 –

高橋 正（甲南大学 知能情報学部）

1

1. はじめに

ゲーム理論は、社会・経済・ビジネスのさまざまな問題について、
そこに登場する個人・企業・政府をプレイヤーと見なし、
どのような行動をとるのかを数理的に分析する理論である。

現実のさまざまな問題を、将棋やボードゲームのようなゲームと
考え、そこでプレイヤーがどのような戦略を選ぶかを分析できる
ことから、この名前がついている。

近年は、コンピュータサイエンスや情報学の分野でも非常に注目
されており、新しい理論が次々と生み出されている。

2

ゲーム理論には、協力ゲームと非協力ゲームがあり、
非協力ゲームは、戦略形ゲームと展開形ゲームという2つの形式
に分類される。

本発表では、戦略型ゲームにおける「囚人のジレンマ（ナッシュ均衡、
パレート最適）、仲裁の必要性、パレート解、交渉原点、
ナッシュ交渉解」について説明し、数式処理システムを用いて
Covid-19の感染現象における対策予算と補償金をナッシュ交渉解
の応用として考察する。

3

2. 戦略型ゲーム

以下に、戦略型ゲームにおける「囚人のジレンマ（ナッシュ均衡、
パレート最適）、仲裁の必要性、交渉原点、ナッシュ交渉解」に
ついて説明する。（[1]）

4

2.1 戦略形ゲームとは

社会におけるさまざまなゲーム的状況ではプレイヤーの意思決定は
相互に関連し、プレイヤーが得る利得は自分自身の戦略だけでなく
他のプレイヤーの戦略にも依存する。

このようなプレイヤーの相互依存関係を表現する基本的なモデルが、
戦略形ゲームである。

5

2.2 囚人のジレンマ（ナッシュ均衡、パレート最適）

戦略形ゲームの一つとして囚人のジレンマがある。

囚人ジレンマと呼ばれるゲームは、次のような物語を想定したもので、
数学者タッカーによって考案されたものである。

今、2人の男AとBが、有名宝石店における盗難事件の容疑者として
別件逮捕された。
2人はどうやら共犯らしいのだが、なかなか口を割らない。
このまま両者が否認を続けたならば、両者ともそれぞれの別件
（実はスリの現行犯）で起訴するしかなく、せいぜい三年の懲役になる
程度である。

6

もしも両者が宝石店の件を自白すれば、両者は六年の刑に
処せられることになっている。

両者のうち一方が自白して、盗んだ宝石の在りかを明らかにし、
共犯者を起訴するに足りる証拠を提供してくれたならば、捜査協力
ということで、自白した方は不起訴処分となり、最後まで否認していた
方は九年の刑に処せられるとする。
服役年数をマイナスの効用とみなしてまとめたのが次の表1である。

表1		B	
		自白(b_1)	否認(b_2)
A	自白(a_1)	-6,-6	0,-9
	否認(a_2)	-9,0	-3,-3

7

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

ここでこの表1を見てみると、明らかに、Aにとっての最良策は
a_1（自白）することである。なぜなら、Bが自白した場合でも、
否認し続けた場合でも、Aにとっての効用は自白する方が高い値
を示しているからである。
全く同じことがBについても言えるので、結局(a_1,b_1)というのが
鞍点になり、このような組み合わせをナッシュ均衡という。

またナッシュ均衡の特徴として、単独で戦略を変更すると絶対に
損をするということである。
例えばAが単独で戦略を自白から黙秘に変えたとすると、
−6から−9になり、Bも同様に言える。

8

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

ところがここで改めて考えてみると、もし2人が否認し続けたならば、
2人にとってはるかに好ましい結果(a_2,b_2)をもたらすことができる。

このようにどのプレイヤーからも文句が出ず、
少なくとも1人のプレイヤーが得をする状態の変化
（ここでいう$(a_1,b_1),(-6,-6) \rightarrow (a_2,b_2),(-3,-3)$）をパレート改善といい、
パレート改善の余地がない状態
（ここでいう$(a_2,b_2),(-3,-3)$）のことをパレート最適という。

9

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

囚人ジレンマ・ゲームでは双方が己の利害得失を離れて
協力しあわなければ共倒れになる可能性があり、
こちらが自己の利害を離れて、共存共栄のための選択肢をとったとき、
相手がそれに歩調を合わせてくれなければこちらは大きな被害
を受けることになる。

よって互いに話し合って実現すべき共存共栄の状態は、
ただ一つであり、両プレイヤーにとって自明のものである。

10

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

しかし、一般的に言えば、両者が共倒れにならないように避けた
としても、実現すべき「共存共栄」の内容は、一意的に定まるもの
とは限らない。

たとえば以下の表2がまさにその例である。

表2		B	
		b_1	b_2
A	a_1	8,3	-1,1
	a_2	1,-1	3,8

11

見つかる、きみのなかの無限大。 KONAN INFINITY

この場合、A、Bいずれのプレイヤーもa_1b_2やa_2b_1を実現させたくない
という点での合意は得られる。

しかし、a_1b_1とa_2b_2のうちいずれを実現させるべきかとなると、
両プレイヤー間の意見の一致はなかなか得られない。

なぜならプレイヤーAはa_1b_1を実現させたいのに対し、
プレイヤーBはa_2b_2を実現させたいからである。

12

2.3　仲裁の必要性、パレート解、交渉原点

前節のような場合どう決定することが望ましいか。
先ほどの例の場合、適当な第三者が仲裁に入り、実現されるべき結果を求め、得られた結果の共同利益が公正に配分されるように、協定内容を決定するのが望ましい。
では、どのような仲裁方式が相互に満足のいく公正なものであるか次の例で示す[1] 。
ふたりの兄弟、兄のA君と弟のB君が、兄弟で一つの部屋を使って、生活をしている。兄のA君は大学受験で日々勉強に専念しているのに対し、弟のB君は高校生になったばかりで大いに遊びたいのである。A君もB君も、趣味はレコード鑑賞であり、同じ部屋にある、ステレオ・プレーヤーで聴くことである。

13

兄Aは弟Bがステレオを聴いているときに勉強するのは嫌だというのに対し、弟も兄が勉強中にステレオを聴くことは心苦しい。

また兄は自分がステレオを聴いているとき、弟が勉強していても気にしない。よって、両者の効用が以下の表3であったとしよう。

表3		弟B	
		勉強b_1	遊びb_2
兄A	勉強a_1	8,3	0,1
	遊びa_2	2,-1	2,6

14

表3より、各人が全く自分の好き勝手行動をするよりも、談合しあって2人が同時に勉強するa_1b_1か、あるいは同時に遊ぶa_2b_2かが望ましいが、一つの部屋でどのような時間配分で勉強と遊び（レコード鑑賞）を両立させるべきかは、分からないのである。
そこで表3を次の図1のようなグラフに表す。

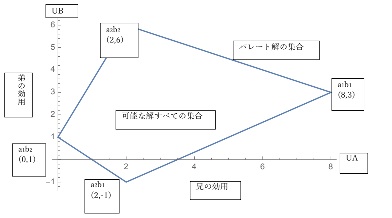

図1

15

各人の行為を確率的に選択する結果の各人の期待効用は、すべて図の中の四辺形の内部および辺上に含まれる。

ここで行為選択の確率は、当面の部屋をそれぞれの使用目的で時間配分をする場合の時間の配分率と考える。

もしも、人々が利己主義の原則に従って行為選択をするとしたならば、a_1b_1とa_2b_2を結ぶ線分よりも左下方の領域にある点が合意点となるとは考えられない。

16

理由は、もしそのような点があったとすると、その点の右上方の点はすべて両者にとって効用が大きくなるわけだから、
利己的な立場からすれば、先の点よりも両者にとってより望ましい点が存在することになるからである。

よって両者が合意すべき点は、図1のようなグラフで、
右上方にある負の勾配をもった辺上に存在する。

そのような点の集合は、当事者間での選考順序の完全一致を社会は実現するというパレート最適性による解の集合だから、
パレート解とよばれる。

17

2.4　仲裁の必要性

望ましい仲裁方式による3つの条件として、以下の3条件が挙げられる。

・第一の条件はパレート解の中から妥結点をさがす。

・第二の条件は各当事者が主張する効用の強さに対しては、任意の正の線型変換を施しても、妥結点の意味が変わらないようにする。
こうしておかないと、何でも主張を過大に表現しがちな人ばかりが得をすることになり、いつわりの効用を表明した方がよいことになってしまうからである。

・第三の条件は仲裁方式が何らかの意味で「公正な」論拠をもったものでならなければならないということが必要である。

18

どのような仲裁方式を採用する場合でも、各当事者のいろいろな主張を「仲裁」するためには、どうしても、効用の個人間比較を行わなければならない。

よって、「公正な」仲裁を行なうためには、仲裁者は当事者に関して何らかの相互比較を行い、それぞれの主張を相互につきあわせてみなければならない。

19

2.5 交渉原点

仲裁者の立場に立って、プレイヤー間の効用を相互比較する場合、はじめにきめなければならないことは、各プレイヤー共通の「原点」(後に話し合いの出発点(交渉原点))をどこに置くかということである。

つまり、すべてのプレイヤーの効用が、仲裁者の目から見て、ゼロ値と定義できる状態を定めなければならない。

20

2.6 ナッシュ交渉解

ナッシュが提案したのはプレイヤーの効用の単位を次のように定めることである。

それは図1に示す通り交渉原点を通る縦線の直線を引き、それらの直線とパレート解の直線を延長した直線との交点を求め、これらの交点の原点からの距離を同じ程度の効用差として一単位とみなすのである。
このような一単位の定義は次のような考え方に基づく。
まず、両者の話し合いにおける交渉原点をa1b1(0,1)に定めたということは、Aにとっての最低を0、Bにとっての最低を1とした範囲で解決策を考えようとしたことになる。

21

次に兄Aは自らの希望するa_1b_1(8,3)を主張する代わりに、相手にとっての最低である1にまで引き下げる仮想事態X’(12,1)を主張するのである。
弟Bも同じように、相手(兄)にとっての最低0にまで引き下げる仮想事態Y’(0,7)を主張し、この両方のつっぱりあいを「オアイコ」とみなし、同等のとみなすのである。

そこで、兄Aの効用は全てO’X’の距離である12で割って、尺度1/12に縮小し、弟Bの効用は全てO’Y’の距離の6で割って、尺度を1/6に縮小し、その上で、パレート解の直線a_1b_1とa_2b_2との間の点で同じ効用となるところをさがすのである。

22

これは図1において尺度変換を施し、その上でO’から45度の勾配の直線を引いてパレート解直線と交わらせても良いが、次のように考えてもよい。

尺度を変換して四五の勾配の直線をO’から延長する代わりに、尺度はもとのままにしておいて、O’から引く直線の勾配を、先の縮小率の逆数比に等しくする。

つまり、O’から勾配αがan=O’Y’/O’X’=6/12=1/2となるように定めて、UB=an*UA+1になる直線を引き、それがa_1b_1とa_2b_2とを結ぶパレート解直線と交わる点Nを求めると、その点の座標が両者に対する効用の公平な分配点となっている。

23

Nの座標は(6,4)となるのだが、これはa_1b_1を確率2/3で選択し、a_2b_2を確率1/3で選択したことと同じである。
この場合の選択確率は次のようにして求める。
今a_1b_1を確率pで選択し、a_2b_2を確率(1−p)で選択したとき、
A,Bの期待効用は
UA=8p+2(1−p)=6p+2
UB=3p+6(1−p)=6−3pとなる。

この期待効用の値がNの座標(6,4)に一致するはずだから、
6p+2=6,6−3p=4からp=2/3が得られる。

24

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

この解の意味は次の通りである。
兄A君と弟B君は、三日間のうち二日は2人揃って勉強し、
あとの1日は2人揃って遊ぶのが最良の策ということになる。

以上がナッシュ交渉解と呼ばれる解決策である。

このナッシュ交渉解を可視化するプログラムをMathematicaで
ゼミの学生が作成した。
（作成したプログラムを示す。）

25

3．ナッシュ交渉解の応用の準備
－COVID －19の死者数データからの分析－

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

ナッシュ交渉解を社会現象の中で応用できないかと考え、
2019年12月から流行し、社会現象の一つである「COVID-19」を
対象として、ナッシュ交渉解の応用を考えた。

COVID-19の死亡者数に関するデータをJohns Hopskins大学が
集積しているデータを使用した。
（https://coronavirus.jhu.edu/region/japan）

このデータは感染者数のデータではなく、死亡者数のデータである。

26

3.1　仮定と目的

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

死亡者数は、感染者数と相関が高いと仮定して、感染者数は、
死亡者数のデータを分析することで考えることができると仮定した。
（死亡者数は、感染者と単位が異なるが、感染者数を表すと仮定した。）
（https://s3-ap-northeast-1.amazonaws.com/kobayashikorio/covid19/covid19.html）

研究の目的は、「COVID-19」についてナッシュ交渉解の応用を考え、
その現象を考察することを目的とする。
具体的には、COVID-19の死亡者数のデータからCOVID-19に対する
予算（医療機関の予算残額と営利活動自粛に対する保障金額）を、
交渉原点を定めたうえでナッシュ交渉解を求め、その結果を考察する
ことである。

27

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

死亡者一人に対してある単位の感染者数がいると仮定して、感染者
に必要な対策予算を使われるとし、日数を変数とする関数（多項式）
で表示する。

そして、営利活動自粛に対する保障金額も日数を変数とする関数
（多項式）で表示する。

この2つの関数（多項式）を用いて、医療機関の予算残額と営利活動
自粛に対する保障金額の利得を求め、交渉原点からのずれを求め、
社会的合意との整合生を考える。

28

3.2　データの収集

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

以下に、分析の手順を示す。

毎日あるいは適切な間隔でJohns Hopkins大学に集積されている
死亡者数を取得する。

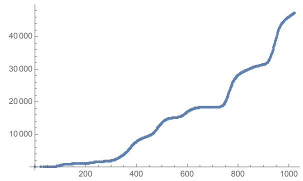

図3.1

29

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

このデータを関数近似（多項式近似）する。
試行錯誤の結果、16次の多項式で近似する。
16次関数で表示したのが以下のグラフとなる。

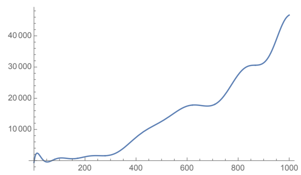

図3.2

30

さらに、上記のグラフが図3.1と近似しているかどうか調べるために、図3.1のグラフと図3.2のグラフを重ねて表示する。
以下のグラフがJohns Hopkins大学のデータのグラフ(図3.1)と16次関数のグラフ(図3.2)を重ねて比較したグラフである。

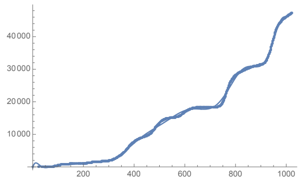

図3.3

31

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

上記のグラフより、16次関数のグラフとJohns Hopkins大学のデータのグラフが近似していることが分かる。
COVID-19の総死亡者数を表す多項式を(日数で)微分し、死亡者数の変化のグラフを求める。
以下のグラフは、縦軸を1日の死亡者数、横軸を日数として、上記の関数(総死亡者数を表す多項式を日数で微分した関数)のグラフである

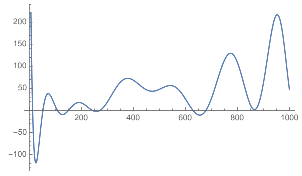

図3.4

32

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

https://s3-ap-northeast-1.amazonaws.com/kobayashikorio/covid19/covid19.html
でデルタ株に関する日々の死亡者数のデータが公開されている。
死亡者数の変化のデータは、デルタ株に関するものしかなかったため、デルタ株の日数と当初からの死亡者数のずれを考えた。
以下がデルタ株の日数と死亡者数のグラフである。
COVID-19が始まってから第3波の時にデルタ株の感染が確認されたため、下記のグラフは、COVID-19の第3波から始まっている。

33

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

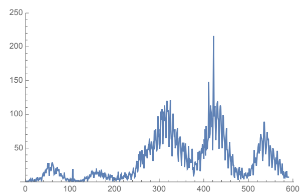

図3.5

34

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

デルタ株に関する死亡者数の変化のグラフを見て、第5波を対象として考察することにした。
(COVID-19の第5波の死亡者が初めてでた216日目から400日目までのグラフを考察することにした。)

下記のグラフは、初期の死亡者数とデルタ株が始まった第3波のデータとのズレを換算するために、図3.3をx軸方向に470日平行移動したものである。
横軸を日数、縦軸を1日当たりの死亡者数とする。

35

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

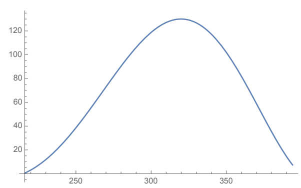

図3.6

36

図3.4と図3.5を比較すると以下のグラフになる。
グラフから、COVID-19における第5波の死亡者数の変化とデルタ株の第３波の死亡者数が近似していることが確認できる。

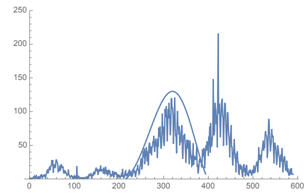

図3.7

37

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

図3.6を原点(0, 0)として表示し、日数と死亡者数の変化の関係を示したグラフを下記に示す。

具体的には、図3.3をx軸に676平行移動したグラフである。

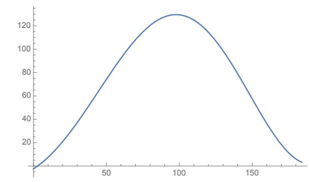

図3.8

38

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

さらに、COVID-19による第5波の総死亡者数と日数の変化を調べるために、COVID-19の第5波に当たる、676日目から860日目までのグラフを表示する。
以下のグラフがCOVID-19の第5波の総死亡者数と日数の変化のグラフである。

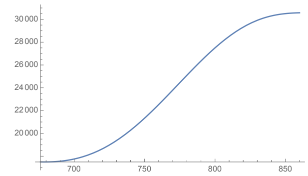

図3.9

39

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

上記のグラフ（図3.8）は、第5波の始まり（676日目）が原点（0, 0）となるようにx軸に676日、y軸に17499人（676日目の死亡者数）平行移動させたものが以下のグラフである。

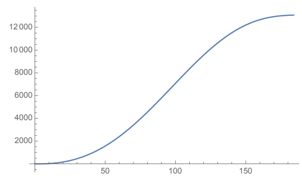

図3.10

40

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

上記のグラフは

0. − 2.64428 x + 0.403118 x^2 + 0.00655043 x^3 − 7.73773*10^−6 x^4
− 2.75659*10^−7 x^5 − 2.43624*10^−10 x^6 + 5.01897*10^−12 x^7
+ 1.0034*10^−14 x^8 − 4.0158*10^−17 x^9 − 1.24381*10^−19 x^10
+ 9.62756*10^−23 x^11 + 6.43766*10^−25 x^12
+ 3.71364*10^−28 x^13 − 1.07778*10^−30 x^14
− 1.67416*10^−33 x^15 − 7.02072*10^−37 x^16

のグラフである。

41

4．ナッシュ交渉解の応用

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

以上のようなCOVID -19の死者数データからの分析を基に、ナッシュ交渉解の応用を考える。

交渉原点として第5波のピークから一週間を経過した時点で、医療機関の医療費の使用及び営利活動への自粛に対する補償を止めることを考え、その結果から医療期間及び営利活動の補償を受ける人々の利得の差を求め、ナッシュ交渉解の社会的意義を考察する。

42

以下の仮説を用いる。
ある医療機関のCOVID-19の第５波で国から支給されている
（予算措置の金額を13億円とし、医療機関が感染者に必要となる
対策費（治療費等）を死亡者１人に対して10万円とする。

この算定は、死亡者数と感染者数が相関しており、感染者数のデータがないため、死亡者数から感染者数を対応させるという前述の仮定を踏襲することとする。

国がCOVID-19の第５波である地域（ある医療機関の管轄地域と
同じ地域）に１日に補償する金額を300万円とする。

43

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

これらの仮定の基で、ある地域での最適戦略を明らかにする。

具体的には、死亡者一人当たりに対する医療機関の対策予算と国（もしくは自治体）が１日に補償する金額の合計を求め、その合計の推移を考える。

医療機関はCOVID-19の第５波に対する対策費として国から13億円の予算措置を受けているが、COVID-19の死亡者数が増えることによって、対策費の13億円は減少する。
国は、COVID-19の第５波が始まってから営利活動の自粛に対して１日に300万円補償しなければならず、費用は増加する。
その結果、上記の合計金額は、どのようになるか？

44

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

一方、感染症は変異が起きる可能性があるため、医療機関は
次の変異株に向けて対策費をできるだけ多く残しておきたい。

このとき、社会的合意（コンセンサス）をどのように形成するかを
考えるために、ナッシュの交渉理論を用いて考える。

上記の仮説より、医療機関の対策費を $up = 130{,}000 - 10 * A$ とおく。
この式は、国からの予算措置金額13億円から、死亡者１人に対して
（実際には感染者に対して）要する対策の費用である。

この対策の費用とCOVID-19の第５波に関する総死亡者数の積を
引いた式である。

45

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

そのグラフは、以下のようになる（図4.1）。

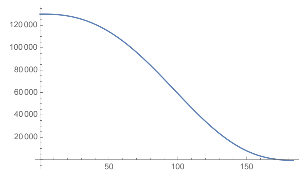

図4.1

46

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

次に、国が１日に補償する金額の合計を $us = 300x$ とおく。
この式は、日数 x と国が１日に補償する金額300万円の積である。
グラフは、以下のようになる（図4.2）。

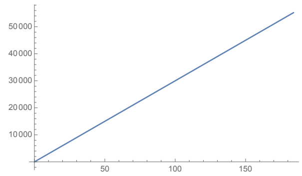

図4.2

47

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

医療機関と補償を受ける人々の間で、パレート最適性を
実現するには、$up + us = 130{,}000 - 10 * A + 300x$ を最大にする
ことが求められる。

$up + us$ のグラフ(xの関数)は、以下のようになる（図4.3）。

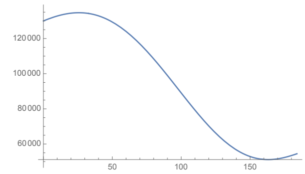

図4.3

48

上の関数を微分することで最大解を得ることができる。

$up + us$ の関数を微分した結果が以下である。

```
{{x -> -664.724}, {x -> -613.69}, {x -> -591.288},
{x -> -486.464 - 28.4046 I}, {x -> -486.464 + 28.4046 I},
{x -> -364.57}, {x -> -206.058 - 40.7936 I},
{x -> -206.058 + 40.7936 I}, {x -> -80.111}, {x -> 25.7463},
{x -> 163.092}, {x -> 212.769}, {x -> 329.302}, {x -> 344.564},
 {x -> 388.39}}
```

上記の結果より、グラフのx軸範囲(0, 184)の間の最大値を取るxの解は25.7463 であることが分かる。

49

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

この解から、医療機関の対策費と補償額について話し合いをするときの交渉の原点を、33日(26日+7日)とする。
(COVID-19の第5波が始まって33日目で、医療機関と国が、対策費用と補償を止めるのが、ナッシュ交渉解の観点から、どのような解釈(社会的な観点からの解釈)になるかを考えることができる。

(ここまでのことをMathematicaで計算した結果を示す。)

50

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

このようなナッシュ交渉解の考え方は、当該関係者の利得と全体的視野における利得(ある意味、社会全体の利得)とのバランスを考えることである。

ゲーム理論は、このような現象の説明及びある種の規範を説明することに役立つ。

51

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

例えば、第5波の終息時点まで営利活動の自粛への補償を受ければ、その人々は利得としては多い。
また、医療機関もその予算は、医療機関が支出するわけではないので、医療機関も予算的には、予算が急激に減るわけではない。

しかし社会全体として考えれば、次の対策も含めて予算を維持する観点が必要である。

52

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

このような観点は、個人的な立場からの意見や利己主義的判断からは程遠い。

そのような観点を仲裁者的立場で考え、全体として考える機会を与えてくれる。

今回の実験的思考を踏まえ、今後、この観点での有効性を立証する現象を示して行きたい。

53

参考文献

見つかる、きみのなかの無限大。
KONAN INFINITY

[1]佐伯　胖(2018),『「きめ方」の論理−社会的決定理論への招待』,
筑摩書房.
[2]岡田　章(2021),『ゲーム理論』, 有斐閣.

54