多項式函数の bifurcation set の計算法 I

田島 慎一，鍋島克輔

新潟大学，東京理科大学

京都 2022 年 12 月

Key words and main tools

Key words:

tame polynomial
μ-constant deformation
bifurcation set

Main tools:

comprehensive Gröbner system
comprehensive local cohomology system
(comprehensive Noether operator system)

contents

1. 準備
2. tame 多項式と comprehensive Gröbner system
3. 無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

(4. bifurcation set と Noether operator)

準備

$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ 多項式函数

基本的問題: $c \in \mathbb{C}$ に対する $f^{-1}(c)$ の topology を決定

Fact (R. Thom) $\exists \Gamma_f$: finite set s.t

$$f : \mathbb{C}^n - f^{-1}(\Gamma_f) \longrightarrow \mathbb{C} - \Gamma_f \text{ is locally trivial}$$

定義 (S. A. Broughton (1983))

上の条件を満たす最小の有限集合を, B_f で表す.

集合 B_f: 函数 f の bifurcation set

注意

$C_f = f(\mathrm{Sing}(f))$: critical values のなす集合

$C_f \subset B_f$: 一般には等号が成立しない

準備

例 (S. A. Broughton)　$f(x,y) = x^2y - x$

$J_f =< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > \subset \mathbb{C}[x,y]$: 多項式環における Joacobi ideal

$J_f =< 2xy - 1, x^2 >=< 1 >$ より, $C_f = \emptyset$

他方　$x^2y - x = x(xy-1)$ より

$f^{-1}(c) \cong \mathbb{C}^*$, for $c \neq 0$

$f^{-1}(0) \cong \mathbb{C} \cup \mathbb{C}^*$

結論

$B_f = \{0\}$

$C_f \neq B_f$

準備

S. A. Broughton (1983)

H. V. Hà et D. T. Lê (1984)

F. Pham (1985)

=====================================

A. Némethi, A. Zaharia, Z. Jelonek, V. T. Lê, M. Oka,

A. Parusinski, D. Siersma, M. Tibar, P. Cassou-Nogues, A. Dimca

C. Sabbah, M. Ishikawa, A. Douai, A. Bodin, K. Kurdyka

M. Schulze, T. S. Pham, H. H. Vue, P. T. Son, L. R. Dias

S. Tanabe, M. Lason, T. T. Nguyen, K. Takeuchi, E. A. Bartolo

contents

1. 準備
2. tame 多項式と comprehensive Gröbner system
3. 無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

(4. bifurcation set と Noether operator)

tame 多項式と compresensive Gröbner system

定義 (S. A. Broughton): $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ is tame, if

$$\exists \delta \geq 0, \text{ s.t } \{x \in \mathbb{C}^n \mid |\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2 + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}|^2 \geq \delta\} \text{ is compact.}$$

定理 (S. A. Broughton) $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$: tame polynomial とする

この時, $B_f = C_f$ が成り立つ

Tame 多項式の応用

(1) $B_f = C_f$ の計算

(2) Gauss-Manin connection の計算

C. Sabbah(1999), A. Douai(1999), M. Schultz(2005)

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

命題 (S. A. Broughton)　$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

f は, Newton 非退化かつ convinient

この時, f は tame である.

目的

tameness を判定するアルゴリズムを構成する

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: 多項式

$p = (p_1,{}_2\, p, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$: parameters,

に対し

$$f^p(x) = f(x) + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

$J_f =< \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} > \subset \mathbb{C}[x]$: ideal

$J_{f^p} =< \frac{\partial f^p}{\partial x_1}, \frac{\partial f^p}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f^p}{\partial x_n} > \subset \mathbb{C}[x]$: ideal

定理 (S. A. Broughton (1988)) 次は同値

(1) f は tame

(2) 原点の近傍 W であり, $p \in W$ に対し

$$\dim(\mathbb{C}[x]/J_f) = \dim(\mathbb{C}[x]/J_{f^p})$$ を満たすものが存在する

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

ideal J_{f^p} の Gröbner 基底は,

comprehensive Gröbner system で計算可能

従って

tameness を判定するアルゴリズムを構成できる

例 $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

$f^{(p,q)}(x,y) = f(x,y) + px + qy$

$J_{f^{(p,q)}} =< 4x^3 - 4y + p, -4x + 4y^3 + q > \subset \mathbb{C}[x,y]$

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 9, \ \forall (p,q)$

故, f は tame

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

例 $f(x,y) = (x+y^2)^2 + y^2$

$f^{(p,q)} = f(x,y) + px + qy$

$J_f =< 2x + 2y^2, 4xy + 4y^3 + 2y >$,

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_f) = 1$

comprehensive Gröbner system による計算結果

$p - 1 = 0$ のとき

$J_{f^{(p,q)}} =< 2x + 2y + 1 >$: ゼロ次元でない

$p - 1 \neq 0$ のとき

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}} = 1$

故, f は tame

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

例　$f(x,y) = x^2y - x$

comprehensive Gröbner system による計算結果

$q = 0, p-1 \neq 0$ のとき

$J_{f(p,q)} = <(p-1)x>$: ゼロ次元でない

$q = 0, p-1 = 0$ のとき

$J_{f(p,q)} = <x^2, xy>$: ゼロ次元でない

$q \neq 0$ の時

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f(p,q)}) = 2$

故, f は tame でない

例 $f(x,y) = x^3y + x^2y^3 + y^{12}$: Newton 非退化, convinient ではない

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_f) = 25$

comprehensive Gröbner system による計算結果

$p = 0$ のとき

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 25$

$243p - 8 = 0$ のとき

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 25$

$p(243p - 8) \neq 0$ のとき

$\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 25$

故, f は tame

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

例 (P. Cassou-Nogues (1996))

$$f(x,y,z) = xy + 3xz^2 + 2yz^2 + x^2z^5 + sxyz^5 + y^2z^5$$

(変形 parameter s を含む)

comprehensive Gröbner system による計算結果

$s-2=0$ および $s+2=0$ の場合,

$\dim(\mathbb{C}[x,y,z]/J_{f^{(p,q,r)}}) = 13$

f は tame

それ以外の場合, f は tame でない

tame 多項式と comprehensive Gröbner system

tame 多項式 f の bifurcation set の計算

Step 1. $J = < \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} >$
Step 2. compute the primary decomposition of the ideal J

$J = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_\ell$ Q_j: primary ideal

$\sqrt{J} = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_\ell$ P_j: associated prime

Step 3, compute $\mu_j = \dim(K[x]/Q_j)/\dim(K[x]/P_j)$

Step 4. compute a monic generator $r_j(t)$ of the ideal

$< t - f, P_J > \cap K[t]$

Step 5 : $\{s_1(t), s_2(t), \cdots, s_m(t)\} = \{r_1(t), r_2(t), \cdots, r_\ell(t)\}$

Step 6. $m_k = \sum_{r_j = s_k} \mu_j$

$T_k = \{t \in \mathbb{C} \mid s_k(t) = 0\}$: multiplicity m_k の bifurcation set

contents

1. 準備
2. tame 多項式と comprehensive Gröbner system
3. 無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

(4. bifurcation set と Noether operator)

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

$f(x) = f_d(x) + f_{d-1}(x) + \cdots + f_0(x)$, $f_k(x)$; homog. of degree k

$\tilde{f}(x, \eta)$; homogenization of f

$F_t(x, \eta) = \tilde{f}(x, \eta) - t\eta^d$, ($t$: パラメータ)

Let

$$A = \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_n : \eta] \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial F_t}{\partial x_1} = \frac{\partial F_t}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F_t}{\partial x_n} = \frac{\partial F_t}{\partial \eta} = \eta = 0\}$$

無限遠 $\eta = 0$ における F_t の特異点集合

補題

$$A = \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_n : 0] \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial f_d}{\partial x_1} = \frac{\partial f_d}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n} = f_{d-1} = 0\}$$

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

例 $f(x,y) = x^2y^2 + x$

$$\tilde{f}(x,y,\eta) = x^2y^2 + x\eta^3$$

$$F_t(x,y,\eta) = x^2y^2 + x\eta^3 - t\eta^4$$

このとき

$$A = \{[x:y:\eta] \mid xy^2 = x^2y = \eta = 0\} = \{[0:1:0],[1:0:0]\} \subset \mathbb{P}^2$$

例 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$$\tilde{f}(x,y,\eta) = x^4 + y^4 - 4xy\eta^2$$

$$F_t(x,y,\eta) = x^4 + y^4 - 4xy\eta^2 - t\eta^4$$

このとき

$$A = \{[x:y:0] \in \mathbb{P}^2 \mid x^3 = y^3 = 0\} = \emptyset : \text{空集合}$$

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

仮定: $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$:ゼロ次元 (m 個の点)

記号: μ_{t,a_j}: F_t の点 a_j における Milnor 数

定理 (A. Parusiński (1995))

$t_0 \notin C_f$ (t_0 は f の regular value)

このとき次は同値

(1) $t_0 \notin B_f$

(2) $\exists U \subset \mathbb{C}$: t_0 の近傍 s.t.

$$\forall t \in U, \mu_{t,a_j} = \mu_{t_0,a_j}, j = 1, 2, \ldots, m$$

注意 $A = \emptyset$ のときは, $B_f = C_f$

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

Milnor 数 μ_{t,a_j} は, comprehensive local cohomology system で計算可能

Bifurcation set は計算可能!!

例 (S. A. Broughton (1983)) $f(x,y) = x^2y - x$

$F_t(x,y,\eta) = x^2y - x\eta^2 - t\eta^4$

$A = \{[0:1:0]\}$: 特異点 $x = uy,\ \eta = hy$ とおく

$F_t = y^3 g_t(u,h),\ g_t(u,h) = u^3 - uh^2 - th^3$

local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial u}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を用いる

$t \neq 0$ のとき, $\dim(H_{J_{g_t}}) = \mu_{t,a} = 2$

$t = 0$ のとき, $\dim(H_{J_{g_0}}) = \mu_{0,a} = 3$

故 $B_f = \{0\}$

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

例 (石川 (2019)) $f(x,y) = x^2y^2 + x$

$$\tilde{f}(x,y,\eta) = x^2y^2 + x\eta^3$$

$$F_t(x,y,\eta) = x^2y^2 + x\eta^3 - t\eta^4$$

$$A = \{[0:1:0],[1:0:0]\} \subset \mathbb{P}^2$$

点 $a_1 = [0:1:0]$ での計算

$x = uy, \eta = hy$ とおく

$$F = y^4 g_t(u,h),\ g_t(u,h) = u^2 + uh^3 - th^4$$

local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial u}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を用いて,

収束冪級数環におけるヤコビイデアル

$J_{g_t} = (\frac{\partial g_t}{\partial u}, \frac{\partial g_t}{\partial h})$ の colength を求める

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

$t \neq 0$ のとき

$H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{[\frac{1}{uh}], [\frac{1}{uh^2}, [\frac{1}{uh^3}]\}$: 3 次元

$t = 0$ のとき

$H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{[\frac{1}{uh}], [\frac{1}{uh^2}, [\frac{1}{uh^3}], [\frac{1}{uh^4}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{u^2h}], [\frac{1}{uh^5}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{u^2h^2}]\}$; 5 次元

故,

$t \neq 0$ のとき, $\dim(H_{J_{g_t}}) = \mu_{t,a_1} = 3$

$t = 0$ のとき, $\dim(H_{J_{g_0}}) = \mu_{0,a_1} = 5$

点 $a_2 = [1 : 0 : 0]$ での計算結果

t によらずに, $\mu_{t,a_2} = 2$

以上より, $B_f = \{0\}$

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

例 (S. A. Broughton) $f(x,y) = (x+y^2)^2 + y^2$ (tame 多項式)

$$\tilde{f}(x,y,\eta) = y^4 + 2xy^2\eta + (x^2+y^2)\eta^2$$

$$F_t(x,y,\eta) = y^4 + 2xy^2\eta + (x^2+y^2)\eta^2 - t\eta^4$$

$A = \{[1:0:0]\}$ での計算

$y = vx, \eta = hx$ とおく

$$F_t = x^4 g_t(v,h),\ g_t(v,h) = v^4 + 2v^2h + h^2 + v^2h^2 - th^4$$

local cohomology $H_{J_{g_t}}$ の基底を求める

$$[\tfrac{1}{vh}], [\tfrac{1}{v^2h}], [\tfrac{1}{v^3h}] - [\tfrac{1}{vh^2}], [\tfrac{1}{v^4h}] - [\tfrac{1}{v^2h^2}]\ [\tfrac{1}{v^5h}] - [\tfrac{1}{v^3h^2}] + [\tfrac{1}{vh^3}] + [\tfrac{1}{vh^2}]$$

t によらず常に, $\mu_{t,a} = 5$

故, $B_f - C_f = \emptyset$

(f は tame 多項式なので local cohomology の計算は不必要)

無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

例 (A. Dimca (1993)) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + x$

$$\tilde{f}(x,y,z\eta) = x^2y + y^2z + x\eta^2$$

$$F_t(x,y,z,\eta) = x^2y + y^2z + x\eta^2 - t\eta^3$$

$$A = \{[0:0:1:0]\}$$

$x = uz, y = vz, \eta = hz$ とおく

$$F_t = z^3 g_t(u,v,h),\ g_t(u,v,h) = u^2v + v^2 + uh^2 - th^3$$

local cohomology $H_{J_{g_t}}$ の基底を求める

$$[\frac{1}{uvh}], [\frac{1}{uvh^2}], [\frac{1}{u^2vh}], [\frac{1}{u^3vh}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{uv^2h}], [\frac{1}{u^4vh}] - \frac{1}{2}[\frac{1}{u^2v^2h}] + \frac{3}{2}t[\frac{1}{u^2vh^2}] + [\frac{1}{uvh^3}]$$

基底 local cohomology は t を含んでいるが, 次元は t に依らず, 一定

故, $B_f = \emptyset$

contents

1. 準備
2. tame 多項式と comprehensive Gröbner system
3. 無限遠での μ-constant deformation と local cohomology

(4. bifurcation set と Noether operator)

Thank you very much for your attention

S. Tajima