

因子分析への グレブナー基底に基づく アプローチ

A GB-based Approach to Factor Analysis

RIMS Workshop (2022/12/19 – 2022/12/21)

Computer Algebra – Foundations and Applications –

深作 亮也 (九大数理)

廣瀬 慧 (九大 IMI)

加葉田 雄太郎 (長崎大)

寺本 圭佑 (広島大)

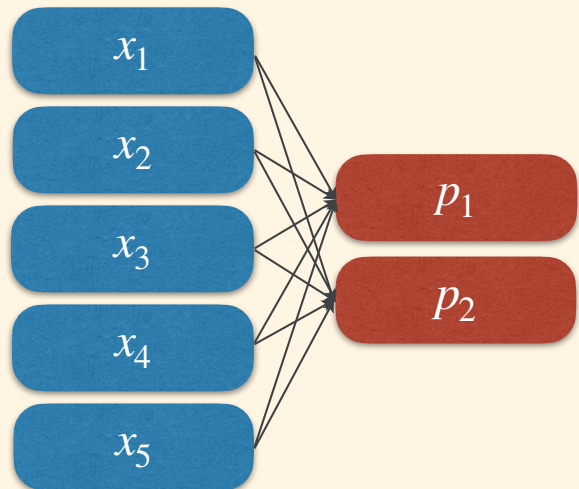
着想から 120 年経っても利用され続ける次元削減法

- 1901 : 主成分分析 by カール・ピアソン (統計学者)

メインテーマ

- 1904 : 因子分析 by チャールズ・スピアマン (心理学者)

観測変数 潜在変数

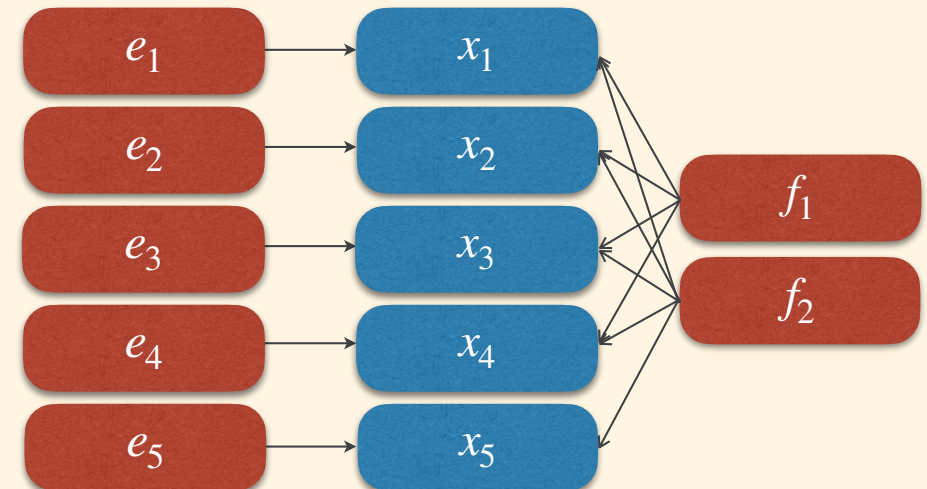


主成分分析では、多数の観測変数を少数の潜在変数によって説明する。

観測変数：原因

潜在変数：結果

潜在変数_e 観測変数 潜在変数_f



因子分析は観測変数に影響するような原因を抽出する。

観測変数：結果

潜在変数_e：結果に関して独自に影響する原因

潜在変数_f：結果に関して共通して影響する原因

着想から 120 年経っても利用され続ける次元削減法

- 1901 : 主成分分析 by カール・ピアソン (統計学者)

メインテーマ

- 1904 : 因子分析 by チャールズ・スピアマン (心理学者)

結果と原因が逆転するので当然ではあるが
数理統計モデルとしても両者は全く異なる

観測変数 x_1, \dots, x_p , 潜在変数 c_1, \dots, c_k

結果 c_i への原因 x_j の影響の強さ m_{ij}

$$\begin{cases} c_1 &= m_{11}x_1 + \dots + m_{1p}x_p \\ &\vdots \\ c_k &= m_{k1}x_1 + \dots + m_{kp}x_p \end{cases}$$

主成分分析

観測変数 x_1, \dots, x_p , 潜在変数 f_1, \dots, f_k

結果 x_i への原因 f_j の影響の強さ ℓ_{ij} ,

結果 x_i 独自に影響する原因の潜在変数 e_i

$$\begin{cases} x_1 &= \ell_{11}f_1 + \dots + \ell_{1k}f_k + e_1 \\ &\vdots \\ x_p &= \ell_{p1}f_1 + \dots + \ell_{pk}f_k + e_p \end{cases}$$

因子分析

何が言いたかったかというと...

- 同時期に着想され、今なお現役の潜在変数モデルの解析手法である主成分分析と因子分析では、観測変数と潜在変数の関係が逆転する
- 因子分析は独自に影響する潜在変数（独自因子）も考えるので
主成分分析などでは起こらない問題（e.g. 不適解問題）も起こる

解決を目指している問題

観測変数 x_1, \dots, x_p , 潜在変数 c_1, \dots, c_k

結果 c_i への原因 x_j の影響の強さ m_{ij}

主成分分析

$$\begin{cases} c_1 &= m_{11}x_1 + \dots + m_{1p}x_p \\ &\vdots \\ c_k &= m_{k1}x_1 + \dots + m_{kp}x_p \end{cases}$$

観測変数 x_1, \dots, x_p , 潜在変数 f_1, \dots, f_k

結果 x_i への原因 f_j の影響の強さ ℓ_{ij} ,

結果 x_i 独自に影響する原因の潜在変数 e_i

因子分析

$$\begin{cases} x_1 &= \ell_{11}f_1 + \dots + \ell_{1k}f_k + e_1 \\ &\vdots \\ x_p &= \ell_{p1}f_1 + \dots + \ell_{pk}f_k + e_p \end{cases}$$

この発表で話したいこと

- 因子分析の概要
- 因子分析に対する最尤法の概要
- 因子分析に対する最尤法で発生する不適解問題
- 因子分析へのグレブナー基底に基づくアプローチ
- 実験
- 発表のまとめ
- 今後やるべきと思うこと

因子分析の概要

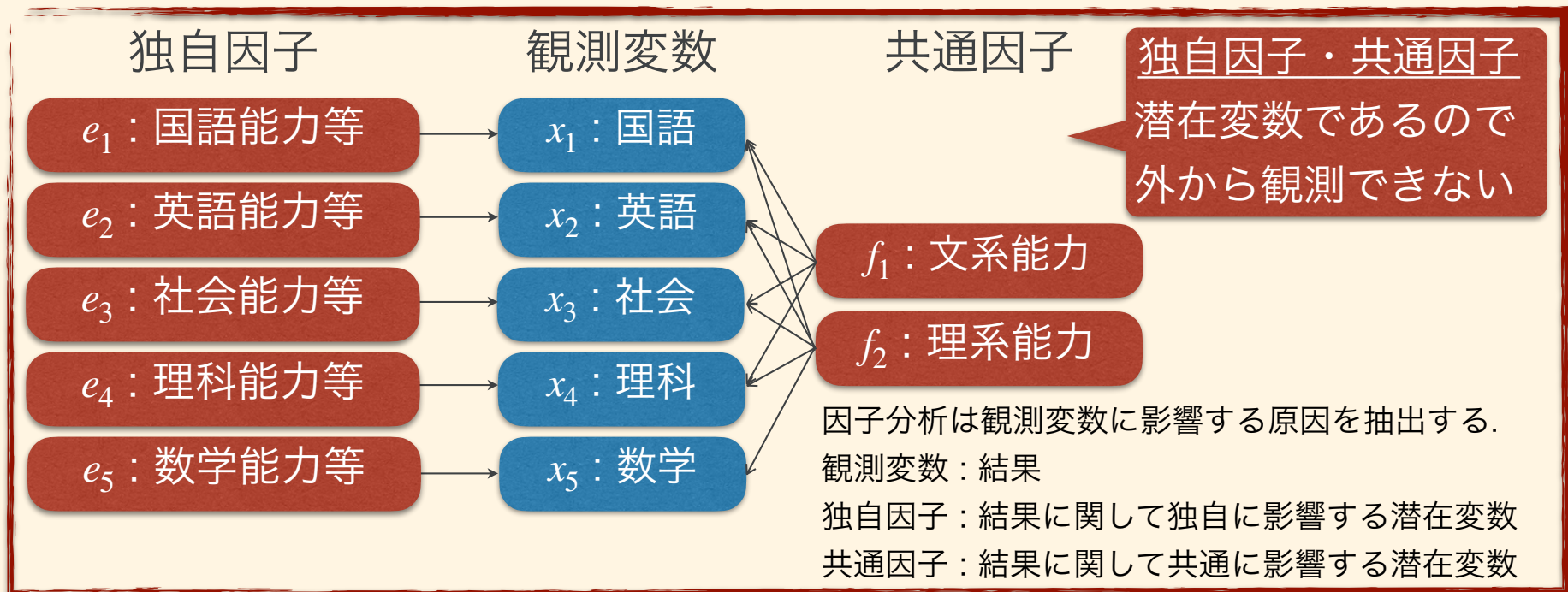
因子分析モデル

観測変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ の平均 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$, 独自因子 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)^T$,

共通因子 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^T$, 因子負荷行列 $L = (\ell_{ij})_{j=1, \dots, k}^{i=1, \dots, p}$ (ただし $k < p$)

$$\begin{cases} x_1 - \mu_1 &= \ell_{11}f_1 + \dots + \ell_{1k}f_k + e_1 \\ &\vdots \\ x_p - \mu_p &= \ell_{p1}f_1 + \dots + \ell_{pk}f_k + e_p \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = L\mathbf{f} + \mathbf{e}$$

因子分析モデル



因子分析モデルに対する仮定から導出されること

観測変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ の平均 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$, 独自因子 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)^T$,

共通因子 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^T$, 因子負荷行列 $L = (\ell_{ij})_{j=1, \dots, k}^{i=1, \dots, p}$ (ただし $k < p$)

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = L\mathbf{f} + \mathbf{e}$$

仮定. 独自因子 \mathbf{e} と共通因子 \mathbf{f} が次の多変量正規分布に従うとする:

$$\mathbf{e} \sim N_p(\mathbf{0}, \Psi), \quad \mathbf{f} \sim N_k(\mathbf{0}, I),$$

ただし, 各分散共分散は Ψ : 対角行列 $\text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_p)$, I : 単位行列である.

仮定. 独自因子 \mathbf{e} と共通因子 \mathbf{f} : 互いに独立. つまり $\text{Cov}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0$.

このとき

$$\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, LL^T + \Psi)$$

回転の不定性

観測変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ の平均 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T$, 独自因子 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)^T$,

共通因子 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^T$, 因子負荷行列 $L = (\ell_{ij})_{j=1, \dots, k}^{i=1, \dots, p}$ (ただし $k < p$)

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = L\mathbf{f} + \mathbf{e}$$

回転の不定性. 直交行列 Q に対して, $L^* = LQ$ 及び $\mathbf{f}^* = Q^T \mathbf{f}$ とおくと

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = L\mathbf{f} + \mathbf{e} = L^*\mathbf{f}^* + \mathbf{e}, \quad \text{Cov}(\mathbf{x}) = LL^T + \boldsymbol{\Psi} = (L^*)(L^*)^T + \boldsymbol{\Psi}$$

のように, 同一の共分散構造が得られ, L が一意に決まらない.

いずれかを仮定すると, 列の正負反転を除き, L は回転に依らず定まる:

- L の上三角部分の成分: 零, かつ, $\ell_{jj} \neq 0$ ($j = 1, \dots, k$),
- $L^T \boldsymbol{\Psi} L$: 成分が異なる対角行列, など (Anderson and Rubin 1956)

今日は
こっち
の前半
を使う

因子分析に対する 最尤法の概要

最尤法

まず $\Sigma = LL^T + \Psi$ とおけば, x は多変量正規分布 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うので
多変量標本データ $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ を観測したとき, 尤度関数は次の形を持つ:

$$f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{pN}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

従って, 対数尤度関数は次のような形をとる:

$$l(\boldsymbol{\mu}, \Sigma | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N) = -\frac{pN}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(\det(\Sigma)) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})$$

そして, 次のような最尤量 $(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\Sigma})$ が計算したい:

$$(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\Sigma}) = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma} l(\boldsymbol{\mu}, \Sigma | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)$$

最尤法

$$\text{対数尤度関数 : } l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N) = -\frac{pN}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(\det(\boldsymbol{\Sigma})) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})$$

$\boldsymbol{\mu}$ の最尤推定量 :

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n$$

データの中心化 $\mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}}$ から $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ を仮定して,

標本共分散 $S = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}})^T$ を使う.

$$\text{対数尤度関数 : } l(\boldsymbol{\Sigma} | S) = -\frac{pN}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(\det(\boldsymbol{\Sigma})) - \frac{N}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} S)$$

$\boldsymbol{\Sigma} = LL^T + \boldsymbol{\Psi}$ が対数尤度関数 $l(\boldsymbol{\Sigma} | S)$ の停留点となる必要十分条件:

$$0 = (S - \boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}L, \quad \boldsymbol{\Psi} = \text{diag}(S - LL^T)$$

導出の際, $\boldsymbol{\Psi}$ の正則性が仮定される

最尤法

$$\text{対数尤度関数： } l(\Sigma | S) = -\frac{pN}{2} \log(2\pi) - \frac{N}{2} \log(\det(\Sigma)) - \frac{N}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1}S)$$

与えられた標本共分散行列 S に対する最尤推定量 $\Sigma = LL^T + \Psi$ の条件:

$$0 = (S - \Sigma)\Sigma^{-1}L, \quad \Psi = \text{diag}(S - LL^T)$$

最尤推定量の必要十分条件 1.

$$0 = (S - \Sigma)\Psi^{-1}L, \quad \Psi = \text{diag}(S - LL^T)$$

最尤推定量の必要十分条件 2.

$$0 = (S - \Sigma)S^{-1}L, \quad \Psi = \text{diag}(S - LL^T)$$

最尤法を用いるために与えた次の仮定から Σ, Ψ, S は正定値行列になる:

- 観測変数 x の分散共分散行列 Σ : 正則
- 独自因子 e の分散共分散行列 Ψ : 正則
- 標本分散共分散行列 S : 正則 (条件 2 を用いる場合)

因子分析に対する 最尤法で発生する不適解問題

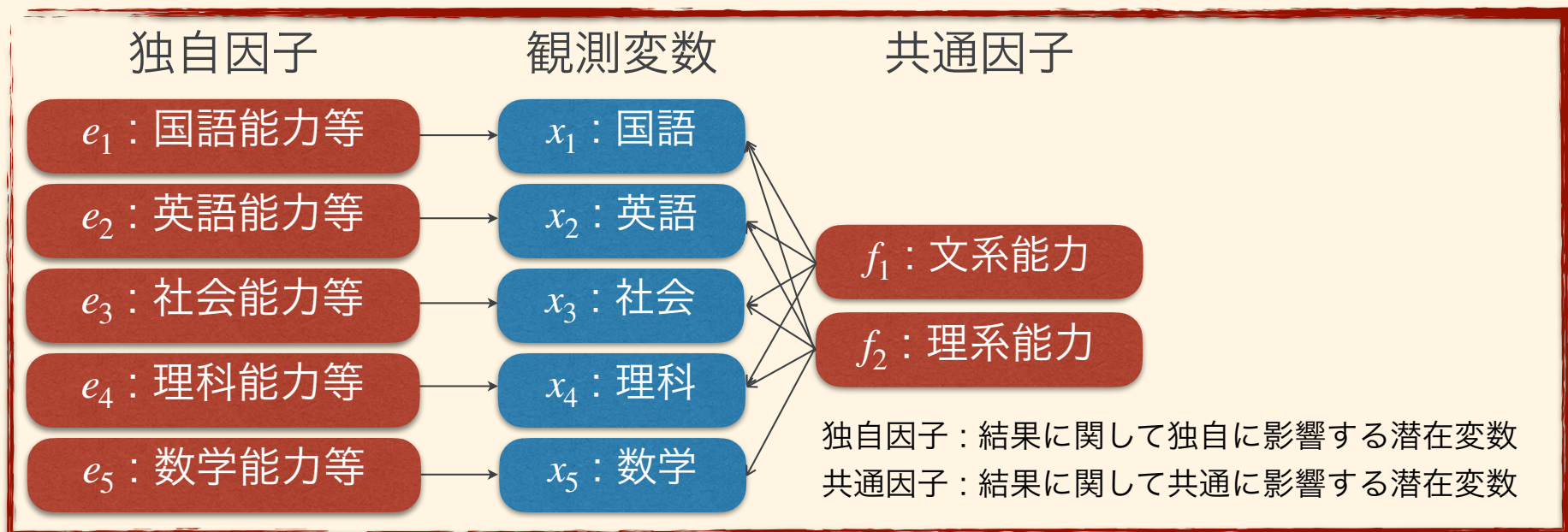
不適解問題

独自因子 e の分散共分散行列 $\Psi = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_p)$ の最尤推定量の中に

$$\psi_i \leq 0$$

が含まれてしまうような状況が、因子分析では、不適解問題と呼ばれる。

- 分散なので、 $\psi_i < 0$ は数理統計的にあり得ない。
- 複数の標本から計算される独自因子 e_i の分散なので
零になってしまうような $\psi_i = 0$ も因子分析的におかしい。



不適解問題

不適解問題は次のような 3 つのケースに分類される van Driel 1978 :

- 識別不能性 : 回転の不定性を除いても L が一意でない場合。
特に, 以下の後半のような必要条件を満たさない場合など.

Anderson and Rubin 1956.

回転の不定性を除いて因子負荷行列 L が一意ならば
任意の正則行列 A に対し LA の各列は 3 つ以上の非零成分を持つ.

- 標本変動 : 真の独自因子の分散は正なのに, 負になった場合など.

例. 共通性 $(\ell_{i1}^2 + \dots + \ell_{ik}^2) / (\ell_{i1}^2 + \dots + \ell_{ik}^2 + \psi_i)$ が小さい場合, など.

- モデルの不適合 : そもそもモデルに合わない変数を含む場合など.

今日の発表の実験では, 主に識別不能性と標本変動に着目していく。
数値的には解空間の次元と関連していると知られている van Driel 1978.
その厳密な原因を探ることに本研究はモチベーションを持っている。

因子分析への
グレブナー基底に基づく
アプローチ

解きたい問題

変数 ℓ_{ij} (合計 $pk - k(k-1)/2$ 個) に関して次の連立方程式を解きたい:

$$0 = (S - (LL^T + \text{diag}(S - LL^T)))S^{-1}L \in (\mathbf{R}[\ell_{ij} : i, j])^{p \times k}$$

計算の方針. 固有値 $d = \det(\Psi)$ が零にならない・なる場合に分ける:

$$d := \det(\Psi) = \prod_{i=1}^p \left(s_{ii} - \sum_{j=1}^k \ell_{ij}^2 \right) =: d_1 \cdots d_p \in \mathbf{R}[\ell_{ij} : i, j]$$

$$\because \Psi = \text{diag}(S - LL^T)$$

つまり, $I = \langle f \mid f \in (S - (LL^T + \text{diag}(S - LL^T)))S^{-1}L \rangle$ に対し次を考える:

飽和根基イデアル $\sqrt{I} : d^\infty$,

和イデアル $I + \langle d_i \rangle$ ($i = 1, \dots, p$)

前者: 零次元の場合が多い → グレブナー基底で解を具体的に計算する

後者: 非零次元の場合が多い → 今日は解空間の複素次元だけを計算する

※ 前者の解空間の複素次元が非零な場合も, 実次元では零しか見たことがない.

実験

グレブナー基底に基づく計算の実装 (1)

- Magma で飽和根基イデアルの辞書式グレブナー基底を計算する.
- Mathematica で計算した実代数解の近似値を計算する.

$$d := \det(\Psi) = \prod_{i=1}^p \left(s_{ii} - \sum_{j=1}^k \ell_{ij}^2 \right) = d_1 \cdots d_p \in \mathbf{R}[\ell_{ij} : i, j]$$

$$\sqrt{I : d^\infty} := \sqrt{\langle f \mid f \in (S - (LL^T + \text{diag}(S - LL^T)))S^{-1}L \rangle : d^\infty}$$

実装の戦略. 一般に I は非零次元だけど, 飽和で零次元になりやすい

- 効率化のため, 飽和は $I : d^\infty = ((I : d_1^\infty) \cdots) : d_p^\infty$ の右辺を計算する.
- $\sqrt{I : d^\infty}$ は素でないので, L の小行列式に基づく場合分けもする.

グレブナー基底の出力ファイル : 200 MB - 1000 MB

一つの計算に要する時間とメモリー : 2 週間 - 3 週間, 10 GB - 20 GB

メモリーが死なない程度に並列で実験を回している (今 : 各々 2, 3 個完了)

実験の入力

- 統計解析ソフト R による最尤推定量が不適解を取るかどうか
- グレブナー基底に基づく計算が終わっているかどうか

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_1	完了	不適 完了	不適 完了	不適	不適	不適	不適		完了	
S_2	完了	完了	不適	不適		不適	不適			
S_3		完了		完了						完了

今日は計算が完了しているものを, 2 個ずつ比較してみることにする.
S₁-1, S₁-2, S₂-1, S₂-2, S₃-2, S₃-4.

病的 S₁-1 (最尤推定量 : 不適でない, #実根 = 29, #不適実根 = 10)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.791 & 0 \\ 0.758 & -0.099 \\ 0.634 & -0.184 \\ 0.127 & 0.976 \\ 0.107 & 0.498 \end{pmatrix}$$

大きい方が良い

尤度 : -3.848

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.788 & 0 \\ 0.759 & -0.100 \\ 0.637 & -0.185 \\ 0.101 & 0.980 \\ 0.094 & 0.500 \end{pmatrix}$$

尤度 : -3.848

真の因子負荷行列

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 \\ 0.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

回転の不定性を除いて一意に因子負荷行列が定まらないタイプ

病的 S₁-2 (最尤推定量 : 不適である, #実根 = 47, #不適実根 = 30)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.978 & 0 \\ 0.818 & 0.011 \\ 0.717 & -0.047 \\ 0.011 & 0.778 \\ 0.091 & 0.770 \end{pmatrix}$$

尤度 : -2.837

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.975 & 0 \\ 0.821 & -0.084 \\ 0.719 & -0.074 \\ -0.010 & 0.605 \\ 0.055 & 0.996 \end{pmatrix}$$

尤度 : -2.814

実験 S₁-1 の詳細 :

他の実根に最尤推定量に似た値は見当たらない.

実験 S₁-2 の考察 :

他の実根で最尤推定量に似た値もないことから, 独自因子の分散が零な場合が最尤量と思われる.

総評 : 不適解でない実根がそこそこいる

不安定 S₂-1 (最尤推定量 : 不適でない, #実根 = 61, #不適実根 = 22)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.316 & 0 \\ 0.316 & 0 \\ 0.632 & 0.478 \\ -0.158 & 0.418 \\ -0.158 & 0.418 \end{pmatrix}$$

尤度 : -4.840

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.348 & 0 \\ 0.348 & 0.000 \\ 0.653 & 0.443 \\ -0.212 & 0.387 \\ -0.212 & 0.387 \end{pmatrix}$$

尤度 : -4.849

真の因子負荷行列

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

共通性が小さいので、不適解が計算されることもあるタイプ

不安定 S₂-2 (最尤推定量 : 不適でない, #実根 = 25, #不適実根 = 12)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.452 & 0 \\ 0.885 & -0.458 \\ 0.663 & 0.409 \\ 0.331 & 0.422 \\ 0.342 & 0.442 \end{pmatrix}$$

尤度 : -4.231

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.389 & 0 \\ 0.815 & 0.573 \\ 0.524 & -0.511 \\ 0.237 & -0.528 \\ 0.243 & -0.552 \end{pmatrix}$$

尤度 : -4.341

実験 S₂-1 の考察 :

他実根で最尤推定量に似た値はなく、ヘッセ行列式が零になる点に収束したのかも…

実験 S₂-2 の考察 :

他実根で最尤推定量に似た値があるが、その実根近傍のヘッセ行列式が零になる点に収束したのかも…

総評 : 不適解でない実根がかなりたくさんいる

健全 S₃-2 (最尤推定量 : 不適でない, #実根 = 41, #不適実根 = 30)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.848 & 0 \\ 0.943 & -0.108 \\ 0.708 & 0.626 \\ 0.177 & 0.753 \\ 0.213 & 0.879 \end{pmatrix}$$

尤度 : -1.658

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.846 & 0 \\ 0.846 & 0.000 \\ 0.534 & 0.533 \\ -0.098 & 0.747 \\ -0.122 & 0.934 \end{pmatrix}$$

尤度 : -2.197

真の因子負荷行列

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

共通性が大きいので, 不適解が計算されにくいタイプ

健全 S₃-4 (最尤推定量 : 不適でない, #実根 = 25, #不適実根 = 8)

最も尤度の高い実根

$$\begin{pmatrix} 0.944 & 0 \\ 0.742 & -0.120 \\ 0.636 & 0.598 \\ 0 & 0.837 \\ 0 & 0.837 \end{pmatrix}$$

尤度 : -2.560

最尤推定量 by R

$$\begin{pmatrix} 0.949 & 0 \\ 0.761 & -0.120 \\ 0.561 & 0.600 \\ -0.110 & 0.839 \\ -0.110 & 0.839 \end{pmatrix}$$

尤度 : -2.598

実験 S₃-2 の考察 :

他実根で最尤推定量に似た値は見当たらないので実根近傍にヘッセ行列式が零になる点に収束したのかも…

実験 S₃-4 の考察 :

上に同じ.

総評 : 不適解でない実根が他のタイプに比べて少ない

グレブナー基底に基づく計算の実装 (2)

- Magma で和イデアルの全次数逆辞書式グレブナー基底を計算する.
- Magma で和イデアルの次元 (複素解空間の次元) を計算する.

$$d := \det(\Psi) = \prod_{i=1}^p \left(s_{ii} - \sum_{j=1}^k \ell_{ij}^2 \right) = d_1 \cdots d_p \in \mathbf{R}[\ell_{ij} : i, j]$$

$$I + \langle d_i \rangle := \langle f \mid f \in (S - (LL^T + \text{diag}(S - LL^T)))S^{-1}L \rangle + \langle d_i \rangle$$

この計算は, すぐ止まる :

10 分程度, Macbook Air でも計算できた.

- ブロック順序などはメモリの消費が激しくて, 今のところ諦めている.
 - 今後はブロック順序をどうにか計算できるようにすることで, 包括的グレブナー基底系から実解空間の構造などを調べたい.
 - そのためには, 問題の更なる分解が必要な気がしている.

独自因子分散が退化する場合の複素解空間の次元

いま $p = 5, k = 2$ なので、独自因子の分散 $\psi_i = s_{ii} - (\ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2)$ が零, つまり

$$s_{ii} = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2$$

という制約を各 $i = 1, \dots, 5$ に対して考える.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
S ₁	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2
S ₂	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2
S ₃	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2

つまり, 全部, イデアルの次元 (複素解空間の次元) は **2** である.

発表のまとめ
今後やるべきと思うこと

まとめと今後

- 不適解問題は数値的視点で扱われたことがあったvan Driel 1978.
しかし, この van Driel の結果以降, 不適解問題に関する進展はなく,
また, 代数的視点・幾何学的視点によって扱われたこともなかった.
そして, 本質的な解決は, いまだ, なされていない.
- この問題に数理統計・特異点論・計算代数から取り組んでいる.
(数理統計: 廣瀬) + (特異点論: 加葉田, 寺本) + (計算代数: 深作)
- **問題を事前に分解しながら**, 不適解問題に計算代数から取り組んだ:
 - 独自因子分散が非零の場合では具体的な解を計算できている,
 - 独自因子分散が非零の場合においては, だいたい, 零次元なので
半正定値計画問題に基づく実根基計算も活用できるかもしれない,
 - 独自因子分散が零の場合の複素解空間の次元も具体的に計算した.
 - 今後は更なる分解で, 独自因子分散が零の場合を攻略したい.

以上



参考文献

参考文献

- 不適解問題に対して数値的に取り組んでいる先行研究
 - Van Driel, O. P. (1978).
On various causes of improper solutions in maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 43(2), 225-243.
- 因子分析モデルの数学構造に対して代数的に取り組んでいる先行研究
 - Drton M., Sturmfels B, and Sullivant S. (2007).
Algebraic factor analysis: tetrads, pentads and beyond. *Probability Theory and Related Fields*, 138, 463-493.
 - Drton M. and Xiao H. (2009).
Finiteness of small factor analysis models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62, 775-783.
- ※ 観測変数の分散共分散構造が持つ不変量のなすイデアルに着目している.
- ※ 不適解問題に着目している感じではないと思うが, 利用できる性質はある.

参考文献

- 零次元実根基イデアルに対して数値的に取り組んでいる先行研究
 - Lasserre J.-B., Laurent M. , Rostalski P. (2008).
Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals. Foundations of Computational Mathematics 8, 607-647.
 - Laurent M. , Rostalski P. (2012).
The Approach of Moments for Polynomial Equations. Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization, 25–60.
 - Wang F., Reid G., and Wolkowicz H. (2017)
An SDP-based method for the real radical ideal membership test. Proc. of SYNASC 2017, 86-93.
- 非零次元実根基イデアルに対して数値的に取り組んでいる先行研究
 - Ma, Y., Wang, C., Zhi, L. (2016)
A certificate for semidefinite relaxations in computing positive-dimensional real radical ideals. Journal of Symbolic Computation 72, 1-20.