角度に制限を設けた格子三角形による正方形の三角形分割

東京理科大学　理学研究科　応用数学専攻
青木史也　武田渉　関川浩

2022年12月21日(水)

目次

- 問題
- 正方形の辺の分け方
- 三角形の数が最小の場合
- nが十分に大きい場合
- n=6~9を精査
- n=12の可能性
- 結論と課題

問題

1辺の長さが自然数nの正方形を以下の条件の下で三角形分割せよ

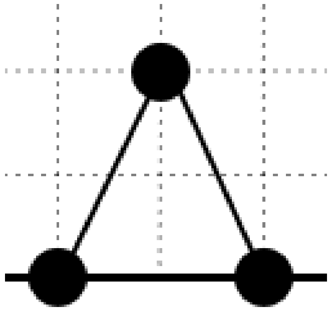
- 三角形の頂点座標は全て整数
- 三角形の角は全て45度以上90度未満

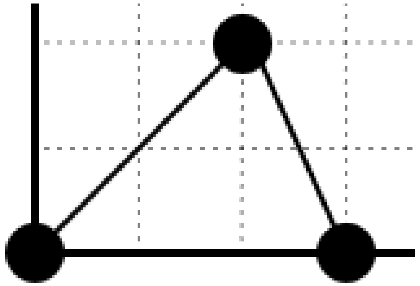
※三角形の辺上に頂点があってよいものとする.

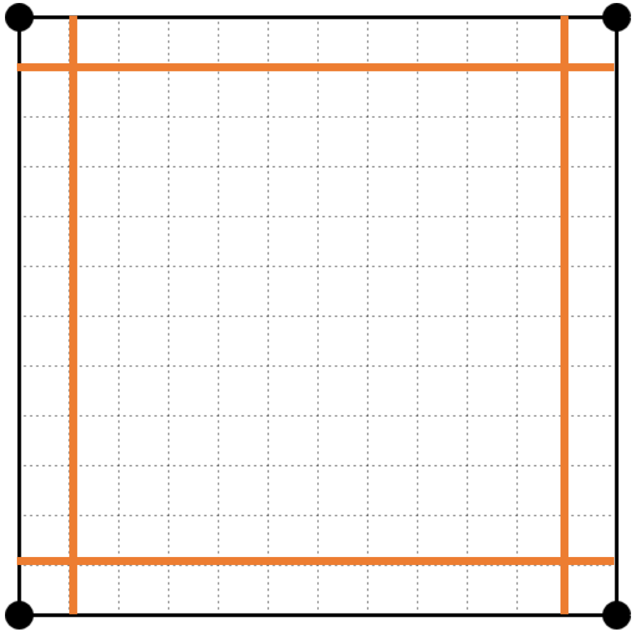
正方形の辺の分け方

- 格子点上の最小の三角形は底辺2高さ2の二等辺三角形なので頂点同士の距離は必ず2以上
- 正方形の隅における最小の三角形は底辺3高さ2の三角形

このことから正方形の辺からの距離が1の点は三角形の頂点にならない.





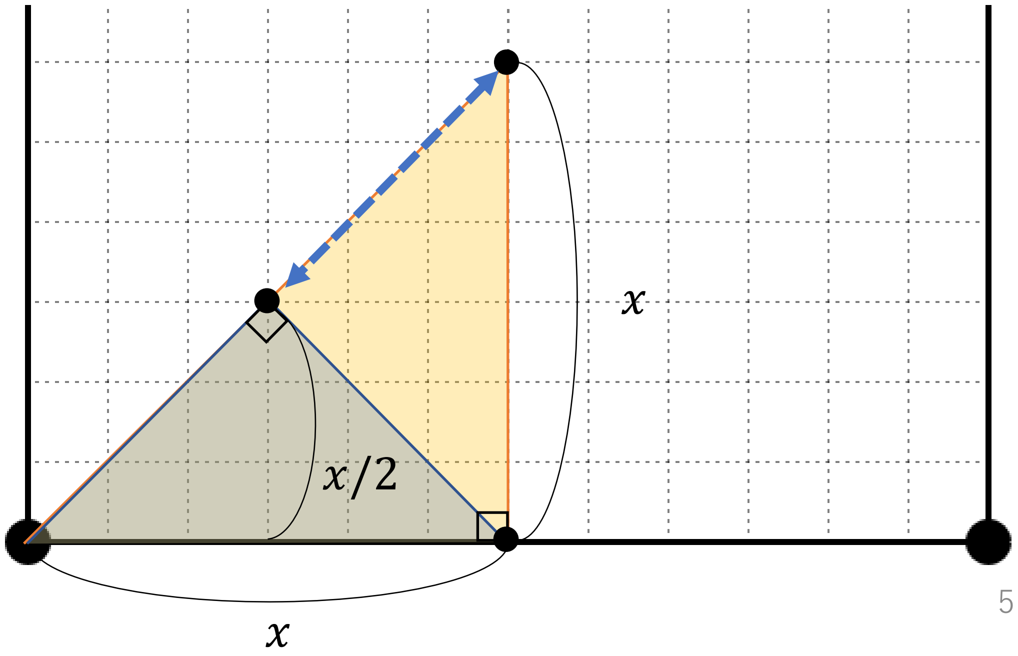


正方形の辺の分け方

正方形の隅を埋める三角形は必ず45度の角をもち, かつ
正方形の対角線上に頂点が存在する.
よって, 底辺をxとしたとき可能な高さは$x/2$より大きくx未満となる.

底辺に対して可能な高さ

底辺	高さ	高さ(正方形の隅)
2	2	-
3	2, 3	2
4	3, 4	3
5	3, 4, 5, 6	3, 4
6	4, 5, 6, 7	4, 5
7	4, 5, 6, 7, 8	4, 5, 6



三角形の数が最小の場合

最小である14個の三角形の場合の作り方

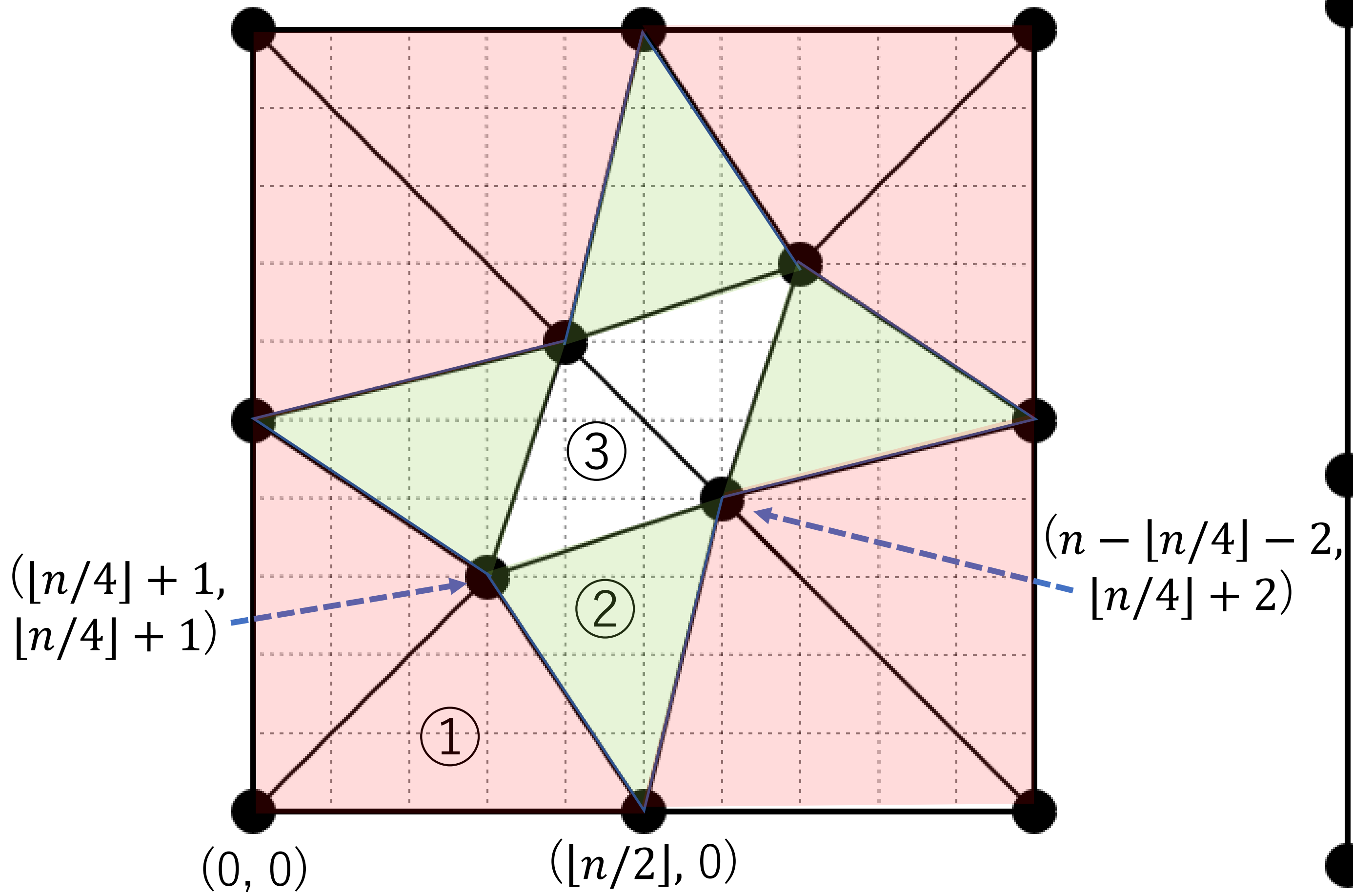
手順1. まず, 正方形の隅を分けるためには45度の角をもつ三角形を作る必要がある. これを1辺が正方形の1辺のだいたい半分の位置になるようにとり, なおかつ正方形の辺上に底辺をもつ三角形の高さが異なるように, 4つの隅に対して行うのでこれで8個.

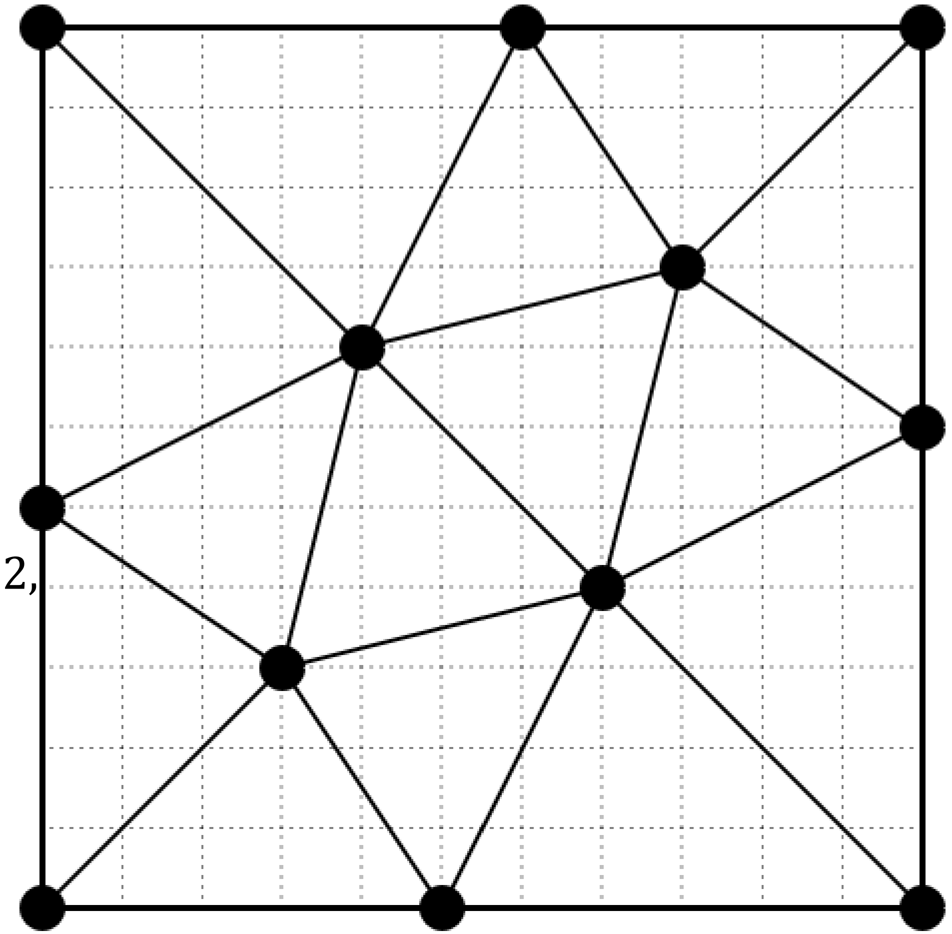
手順2. 正方形の辺上にある頂点と先ほどとった頂点で三角形を作ると4個.

手順3. 中央にひし形ができるのでそれを分けて2個.

三角形の数が最小となる分割方法

(例) n =10,11の場合





三角形の数が最小の場合

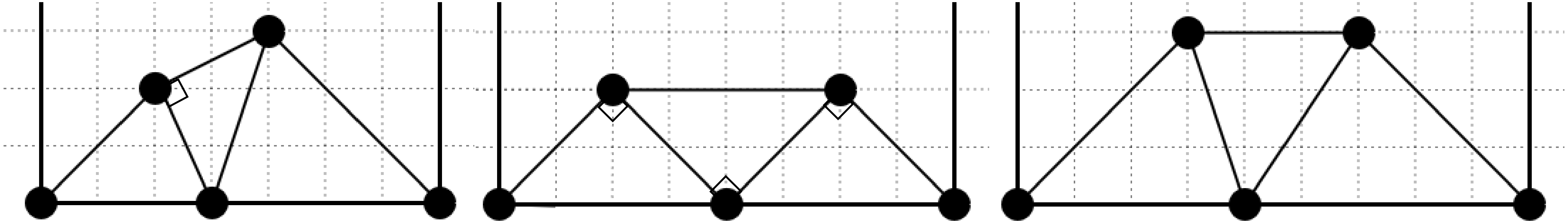
これをnがいくつのときに行うことができるか.

- 隅に用いる45度を含む最小の三角形は底辺が3であるため
  この時点で$n \geqq 6$となる.
- n=6のとき,中心にできるひし形が正方形となるため不可能.
- n=7のとき,手順1でできる三角形が底辺と高さの比が3:2と4:3
  の三角形となり,手順2でできる三角形が直角三角形となり不可能.

※ n=8以上のとき,正方形の1辺を3つ以上に分けることができるが
その際は別途考える

三角形の数が最小の場合

- n=8, 9のとき,辺の分け方が何通りか存在するが,
  いずれの場合も成立しない部分が生じるので不可能である.



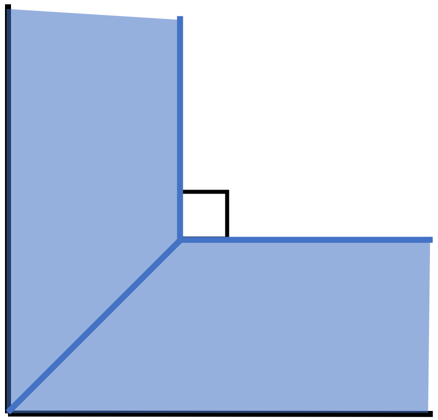
- n=10, 11, 13のときは可能(図参照).

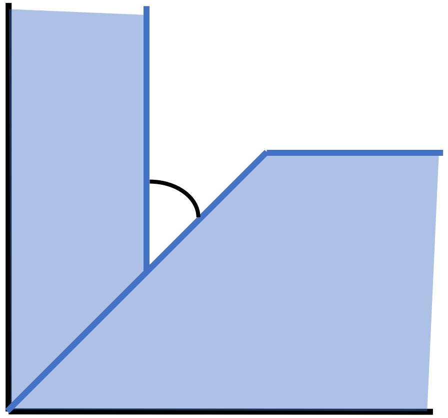
三角形の数が最小の場合

辺を分けるときに台形しか作れない場合

・台形の高さが全て等しい場合,内側により小さい正方形が生じるため意味がない.

・高さが異なる台形を組み合わせる場合,境目に45°の隙間が生じるため制限が大きく,結果的に意味がない.





三角形の数が最小の場合

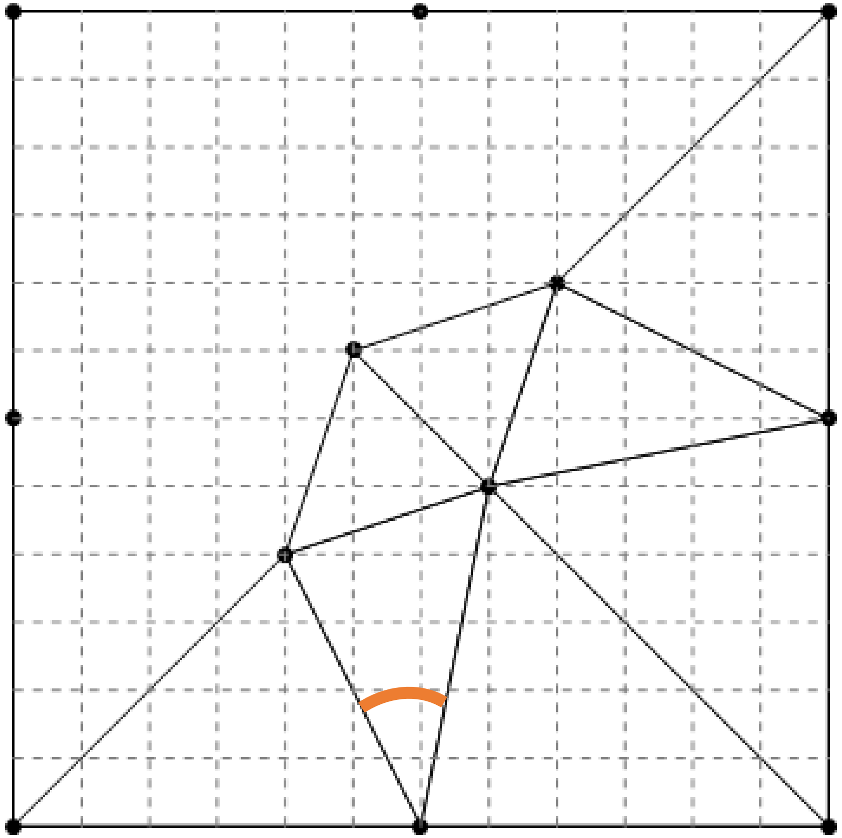
- n=12のとき、正方形の辺は3:9, 4:8, 5:7, 6:6に分けることができる.

辺の分け方	高さの比
3:9	2:5, 2:6, 2:7, 2:8
4:8	3:5, 3:6, 3:7
5:7	3:4, 3:5, 3:6, 4:4, 4:5, 4:6
6:6	4:4, 4:5, 5:5

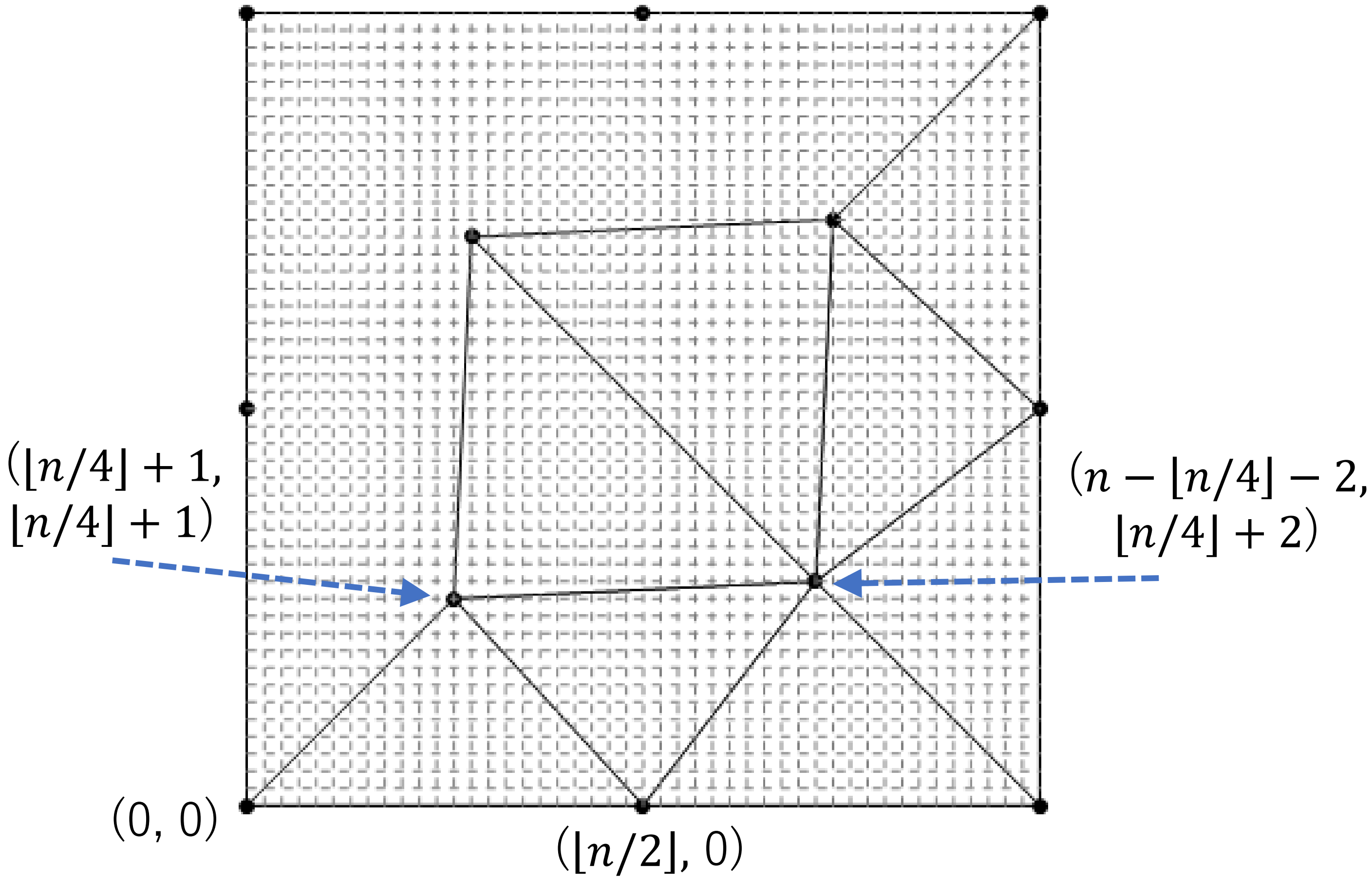
この中で手順2の三角形を作ることができるのは両方とも高さ4の場合のみであるが,この場合は中央が正方形になるため不可能.

三角形の数が最小になる場合をn =13まで考えた上でこれ以上の場合も同様に行うことができるが,この考え方は一旦ここまでとする.

三角形の数が最小の場合



n=12の場合(失敗例)

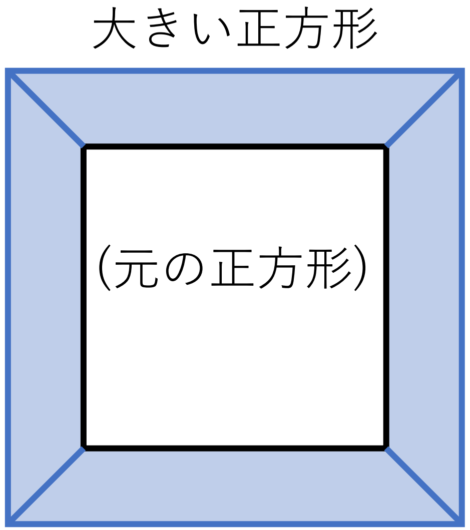


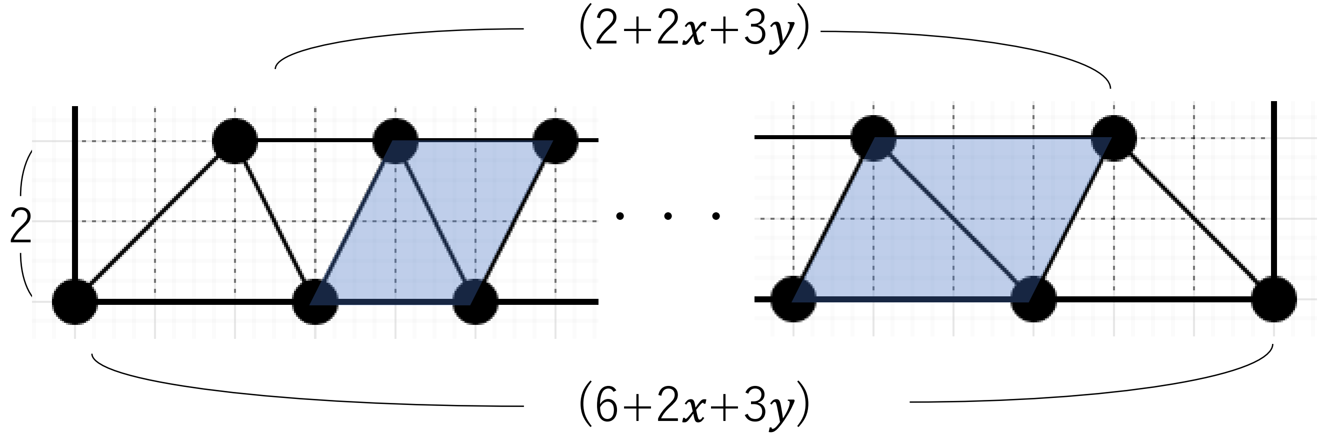
nが十分に大きい場合

$\boldsymbol{n}$が十分に大きい場合

　いずれの場合も三角形分割した正方形の周囲に4個の台形を置くことにより, より大きい正方形の三角形分割が得られる.

　また, 台形は三角形を組み合わせることにより上底と下底の長さを変えることができる.





$\boldsymbol{n}$が十分に大きい場合

台形の高さが2のとき, 上底と下底の長さは2通りの増やし方がある.

・底辺2の三角形を用いた場合　(2+2x):(6+2x) (x≧0)

　n=2+2xで可能ならば, n=6+2xも可能

・底辺3の三角形を用いた場合　(2+3y):(6+3y) (y≧0)

　n=2+3yで可能ならば, n=6+3yも可能.

また,組み合わせると(2+2x+3y):(6+2x+3y)となり,

これによりnが1,3以外で可能な場合,

n+4の場合も可能であることが分かる.

$\boldsymbol{n}$が十分に大きい場合

台形の高さ3のとき、上底と下底の比率は3通りの増やし方がある
先程と同様の方法で考えると,上底が3, 4の台形に
底辺が3, 4, 5の平行四辺形を追加することができる.

つまり, n=3+3x+4y+5zまたはn=4+3x+4y+5z (x, y, $z \geqq 0$)で
可能な場合, $n+6$も可能.これによりnが1, 2, 5以外で可能な場合,
n+6の場合も可能であることが分かる.

n=10, 11, 13 で可能なことから, 上記を組み合わせると,
13以上はすべて可能であることが分かる.

n=6~9を精査

　正方形の辺を他の組み合わせ,手順1で作成した三角形の辺の延長,もしくはさらに細かく分けることは可能であるか考える.
　そのために正方形の辺上にある頂点が角度の条件を満たしている場合についてのみ考える.
　ただし,条件を満たすが高さが全て等しい場合は台形となり内側に直角が生じるためこの問題において無意味であるため不可能とする.

　n=6~9のとき, いずれも細かく分けることができないか成立しない部分が生じるので不可である.

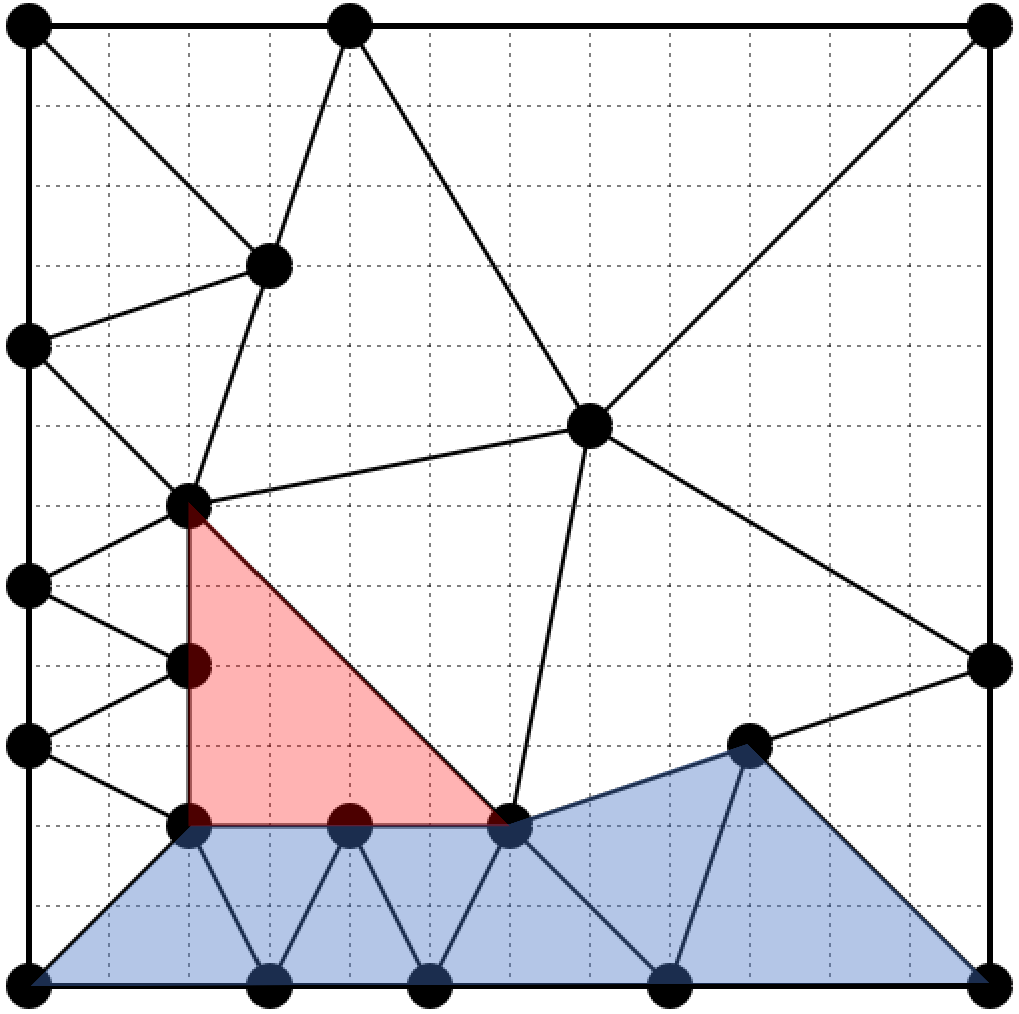
n=12の可能性

先ほどと同様に考えると,正方形の辺を3つ以上に分ける組み合わせは14通りであるが,3:2:3:4の場合を除いて台形になるか角度が成立しないかのいずれかとなる.

3:2:3:4が含まれる場合と辺を延長する場合に成立する可能性が残されているため,その場合について考える.

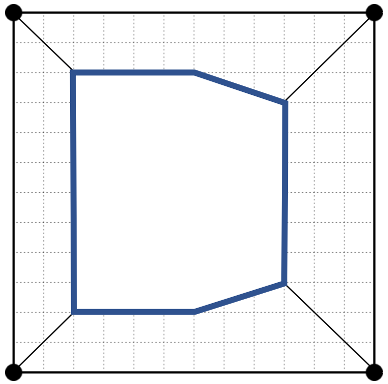
n=12の可能性

(例) 3:2:3:4の場合かつ大きい三角形ができる例(失敗例)

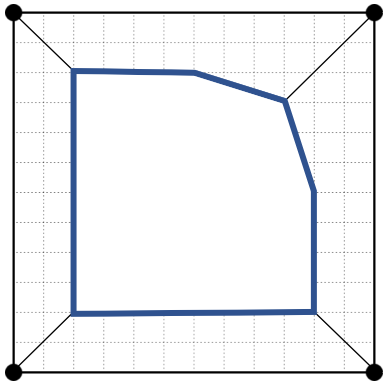


n=12の可能性

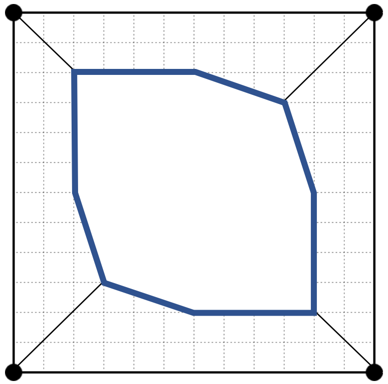
3:2:3:4が含まれる場合,内側にできる多角形の組み合わせは4通り存在するが,いずれの場合も不可能.



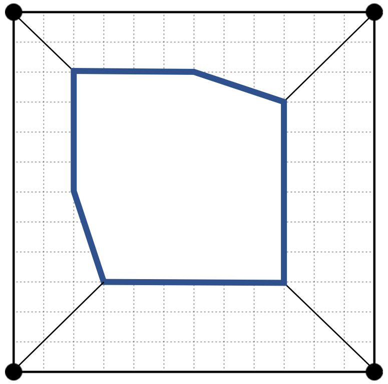
2, 2, 3, 3



2, 2, 2, 3



2, 3, 2, 3



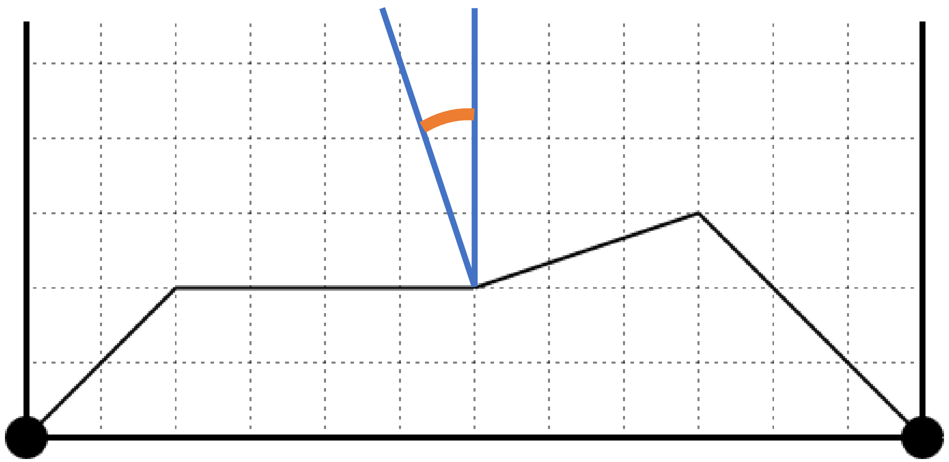
2, 3, 3, 3

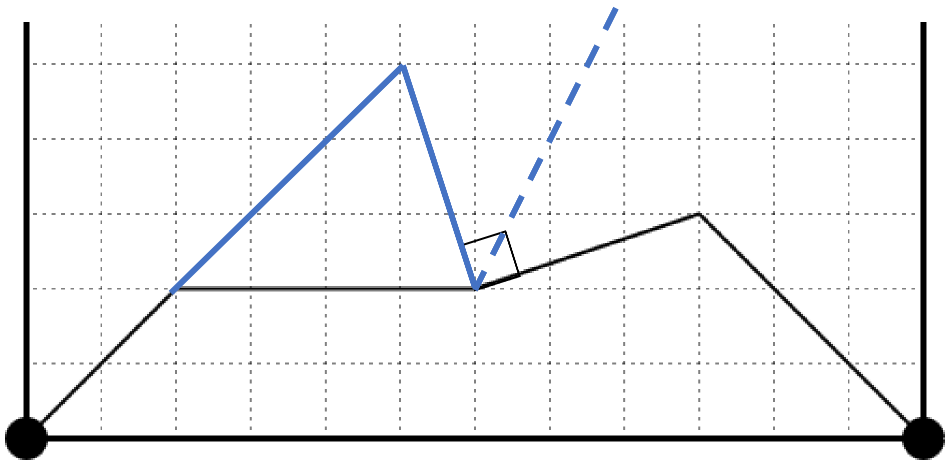
n=12の可能性

3:2:3:4の角度(約161.6度)の分け方として,2通りの分け方がある.

・2つに分ける場合,角を分割する辺をとることができる範囲が非常に狭いため不可能となる.

・3つに分ける場合,隅から接続することができるように辺をとると,残る部分に直角が発生し,必ず直角三角形ができるので不可能となる.

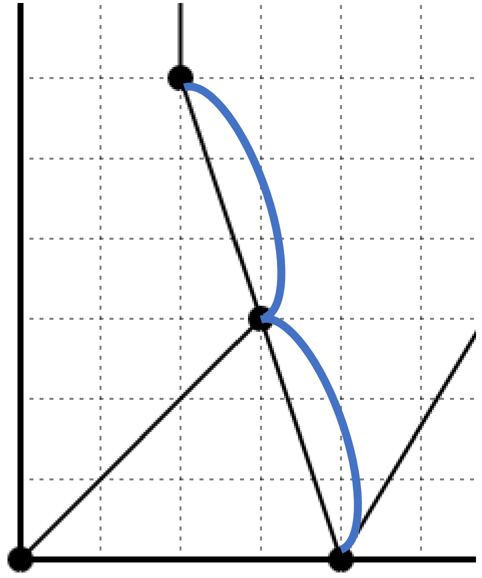




n=12の可能性

辺を延長したときに不可能であるか.
基本的にすでに考えた三角形の辺を整数倍伸ばす必要がある.

この場合に延長した先の点をとることができるかを考えると,
3:2:3:4につなぐ場合のみ点をとることができるが,
他の場所で結果的に不可能となる.



結論と課題

・結論

n=10, 11, 13以上の場合に条件を満たす三角形分割が可能である.

・課題

n=12の可能性を調べるにあたり, 現在の方法では総当たりに近いため, より効率的な方法を考える.

参考文献

- ” What is the smallest number of $45^\circ - 60^\circ - 75^\circ$ triangles that a square can be divided into?”. Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/44684, （参照 2022-12-14）.
- M.Laczkovich, "Tilings of Polygons with Similar Triangles." Combinatorica 10, 281-306, 1990.